E 16. Capacité d'un condensateur plan idéal.

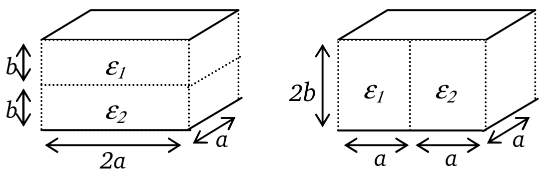
Considérons un condensateur plan idéal dont les armatures, séparées par du vide, ont des surfaces en regard rectangulaires, d'aire S, qui sont distantes de a. Chargeons ce condensateur avec la charge Q. Soit Oz l'axe dirigé de l'armature positive vers l'armature négative, l'origine étant prise à la surface de l'armature positive.

Nous envisageons alors deux méthodes pour calculer le champ.

1) a) Montrer à l'aide du théorème de Gauss que le champ est uniforme entre les armatures.
   b) Utiliser le théorème de Coulomb pour exprimer $\vec{E}(z \to 0^+)$.
   c) Utiliser le théorème de Coulomb pour exprimer $\vec{E}(z \to a^-)$.
   d) En déduire l'expression de $\vec{E}$ entre les armatures en fonction de Q, S et ε_0.
2) Deuxième méthode : déterminer directement $\vec{E}$ à l'aide du théorème de Gauss, la surface de Gauss étant un parallélépipède rectangle englobant la surface chargée de l'armature positive.
3) Déterminer la ddp entre les armatures.
4) En déduire la capacité C.
5) Que deviendrait cette capacité si le vide séparant les armatures était remplacé par un diélectrique de permittivité ε ?

E 17. Associations de condensateurs plans.

Les armatures étant constituées par les faces supérieures et inférieures des parallélépipèdes, exprimer les capacités des condensateurs ci-contre, avec $b \ll a$. Que nous indique cette condition ?

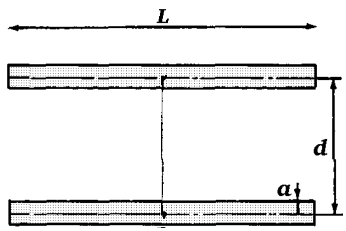


E 18. Retrait de diélectrique. *(sans calculatrice)*

1) Un condensateur plan idéal, dont les armatures de surface $S = 5\ \mathrm{cm^2}$ et distantes de $a = 1\ \mathrm{mm}$ sont séparées par un diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = 10$, est chargé sous une ddp $U = 100\ \mathrm{V}$ puis isolé. On retire alors le diélectrique. Quelles sont la charge du condensateur et la ddp à ses bornes ? On donne $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$.
2) Même question, le condensateur restant relié au générateur.
3) Calculer dans les deux cas la variation d'énergie électrostatique due au retrait du diélectrique.

E 19. Capacité linéique d'une ligne bifilaire.

On considère deux cylindres très allongés identiques, de longueur L et de rayon a, placés parallèlement, à une distance d l'un de l'autre (voir schéma ci-contre). Ces cylindres constituent une ligne bifilaire ; on supposera dans tout ce qui suit : $a \ll d \ll L$.

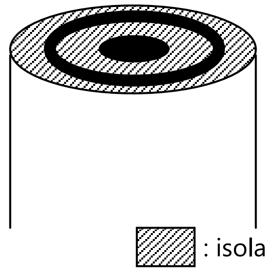


Chacun de ces fils est relié à une borne d'une source de tension : le cylindre Ⓐ porte alors la charge $+Q$ et le cylindre Ⓑ la charge $-Q$ et la source de tension impose la différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ entre les deux cylindres.

1) Déterminer la capacité linéique c définie par $\dfrac{Q}{L} = cU_{AB}$.
   méthode : calculer $\vec{E}$, en déduire U_{AB} et c.
2) *Application numérique :* Calculer c et U_{AB} pour $L = 10\ \mathrm{m}$; $d = 0{,}3\ \mathrm{m}$; $a = 5\ \mathrm{mm}$ *et* $Q = 5.10^{-8}\ \mathrm{C}$; $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$.

E 20. Câble coaxial.

Pour constituer un câble coaxial, on utilise un fil de cuivre cylindrique de rayon R_A et de longueur ℓ protégé par une enveloppe conductrice cylindrique de même axe et de rayon interne R_B. Un isolant sépare les deux conducteurs et enveloppe l'ensemble ; on admettra que la présence de l'isolant a pour seul effet de multiplier par $\varepsilon_r = 4$ la permittivité ε_0 du vide ; on rappelle que dans le système des unités SI : $\varepsilon_0 = 1/(36\pi.10^9)$ $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.



Les effets de bords seront négligés.
L'enveloppe conductrice extérieure est reliée au sol.
Le conducteur central est au potentiel $V_A = 120$ kV.

1) Exprimer le champ et le potentiel électriques entre les armatures Ⓐ (centrale) et Ⓑ (extérieure), en fonction de V_A, R_A, R_B et r (distance à l'axe du câble).
2) Exprimer $c = \dfrac{C}{\ell}$, la capacité par unité de longueur du câble.
3) Tracer $E(r)$. Donner l'expression de E_{max}, la valeur maximale du champ dans le diélectrique.
   Comment évolue cette valeur : - si, R_A étant fixé, R_B diminue ?
   - si, R_B étant fixé, R_A diminue ?
   - si, R_B/R_A étant fixé, R_B diminue ?

La suite de l'exercice est un problème de dimensionnement : on souhaite un câble d'encombrement minimum mais capable de supporter E_{max}.

4) Le champ maximal que l'isolant peut supporter, appelé champ disruptif, est $E_0 = 8.10^6$ V/m. En supposant R_A fixe, exprimer la valeur minimale du rayon du conducteur externe pour laquelle le champ a la valeur maximale que l'isolant peut supporter, en fonction de R_A, V_A et E_0.
5) Le rayon du conducteur interne R_A peut varier; les autres conditions étant les mêmes qu'au 4), calculer R_A et R_B, pour que la valeur de R_B soit minimale.
   En déduire la valeur de c correspondante. Application numérique.

E 21. Forces exercées sur les armatures d'un condensateur plan.

Considérons un condensateur plan idéal dont les armatures, distantes de x, ont chacune pour surface S, et sont séparées par de l'air. Soit $\pm\sigma$ les densités de charge portées par les armatures.

1) Placer les forces qui s'exercent sur chaque armature lorsqu'on établit une ddp U entre elles.
2) Soit $\vec{E}$ le champ uniforme régnant entre les armatures. Exprimer $\vec{E}$ en fonction de x et U.
3) Soit $\overrightarrow{E_B}$ le champ créé par l'armature négative du condensateur.
   On rappelle que $\left\|\overrightarrow{E_B}\right\| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Exprimer $\overrightarrow{E_B}$ en fonction de $\vec{E}$. En déduire l'expression de $\overrightarrow{E_B}$ en fonction de x et U.
4) En déduire la force $\overrightarrow{F_A}$ qui s'applique sur l'armature positive en fonction de x, S, ε_0, U.
5) En déduire, en utilisant la relation $\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{E}_p$, l'expression de l'énergie électrostatique en fonction de C et U.