

**E 16. Capacité d'un condensateur plan idéal.**

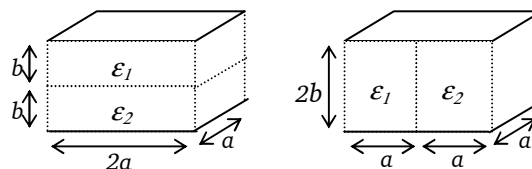
Considérons un condensateur plan idéal dont les armatures, séparées par du vide, ont des surfaces en regard rectangulaires, d'aire  $S$ , qui sont distantes de  $a$ . Chargeons ce condensateur avec la charge  $Q$ . Soit  $Oz$  l'axe dirigé de l'armature positive vers l'armature négative, l'origine étant prise à la surface de l'armature positive.

Nous envisageons alors deux méthodes pour calculer le champ.

- 1) a) Montrer à l'aide du théorème de Gauss que le champ est uniforme entre les armatures.  
 b) Utiliser le théorème de Coulomb pour exprimer  $\vec{E}(z \rightarrow 0^+)$ .  
 c) Utiliser le théorème de Coulomb pour exprimer  $\vec{E}(z \rightarrow a^-)$ .  
 d) En déduire l'expression de  $\vec{E}$  entre les armatures en fonction de  $Q$ ,  $S$  et  $\epsilon_0$ .
- 2) Deuxième méthode : déterminer directement  $\vec{E}$  à l'aide du théorème de Gauss, la surface de Gauss étant un parallélépipède rectangle englobant la surface chargée de l'armature positive.
- 3) Déterminer la ddp entre les armatures.
- 4) En déduire la capacité  $C$ .
- 5) Que deviendrait cette capacité si le vide séparant les armatures était remplacé par un diélectrique de permittivité  $\epsilon$ ?

**E 17. Associations de condensateurs plans.**

Les armatures étant constituées par les faces supérieures et inférieures des parallélépipèdes, exprimer les capacités des condensateurs ci-contre, avec  $b \ll a$ . Que nous indique cette condition ?



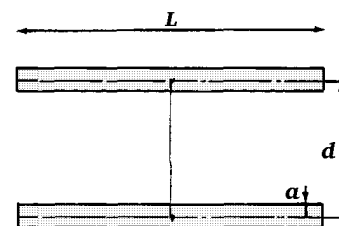
**E 18. Retrait de diélectrique. (sans calculatrice)**

- 1) Un condensateur plan idéal, dont les armatures de surface  $S = 5 \text{ cm}^2$  et distantes de  $a = 1 \text{ mm}$  sont séparées par un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r = 10$ , est chargé sous une ddp  $U = 100 \text{ V}$  puis isolé. On retire alors le diélectrique. Quelles sont la charge du condensateur et la ddp à ses bornes ? On donne  $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- 2) Même question, le condensateur restant relié au générateur.
- 3) Calculer dans les deux cas la variation d'énergie électrostatique due au retrait du diélectrique.

**E 19. Capacité linéique d'une ligne bifilaire.**

On considère deux cylindres très allongés identiques, de longueur  $L$  et de rayon  $a$ , placés parallèlement, à une distance  $d$  l'un de l'autre (voir schéma ci-contre). Ces cylindres constituent une ligne bifilaire ; on supposera dans tout ce qui suit :  $a \ll d \ll L$ .

Chacun de ces fils est relié à une borne d'une source de tension : le cylindre (A) porte alors la charge  $+Q$  et le cylindre (B) la charge  $-Q$  et la source de tension impose la différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$  entre les deux cylindres.



- 1) Déterminer la capacité linéique  $c$  définie par  $\frac{Q}{L} = cU_{AB}$ .

méthode : calculer  $\vec{E}$ , en déduire  $U_{AB}$  et  $c$ .

- 2) Application numérique : Calculer  $c$  et  $U_{AB}$  pour  $L = 10 \text{ m}$  ;  $d = 0,3 \text{ m}$  ;  $a = 5 \text{ mm}$  et  $Q = 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  ;  $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**E 20. Câble coaxial.**

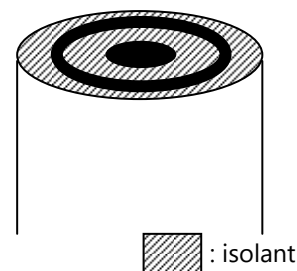
Pour constituer un câble coaxial, on utilise un fil de cuivre cylindrique de rayon  $R_A$  et de longueur  $\ell$  protégé par une enveloppe conductrice cylindrique de même axe et de rayon interne  $R_B$ . Un isolant sépare les deux conducteurs et enveloppe l'ensemble ; on admettra que la présence de l'isolant a pour seul effet de multiplier par  $\epsilon_r = 4$  la permittivité  $\epsilon_0$  du vide ; on rappelle que dans le système des unités SI :  $\epsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9) \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Les effets de bords seront négligés.

L'enveloppe conductrice extérieure est reliée au sol.

Le conducteur central est au potentiel  $V_A = 120 \text{ kV}$ .

- 1) Exprimer le champ et le potentiel électriques entre les armatures **A** (centrale) et **B** (extérieure), en fonction de  $V_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  et  $r$  (distance à l'axe du câble).
- 2) Exprimer  $c = \frac{C}{\ell}$ , la capacité par unité de longueur du câble.
- 3) Tracer  $E(r)$ . Donner l'expression de  $E_{max}$  la valeur maximale du champ dans le diélectrique.  
 Comment évolue cette valeur :
  - si,  $R_A$  étant fixé,  $R_B$  diminue ?
  - si,  $R_B$  étant fixé,  $R_A$  diminue ?
  - si,  $R_B/R_A$  étant fixé,  $R_B$  diminue ?



La suite de l'exercice est un problème de dimensionnement : on souhaite un câble d'encombrement minimum mais capable de supporter  $E_{max}$ .

- 4) Le champ maximal que l'isolant peut supporter, appelé champ disruptif, est  $E_0 = 8 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ . En supposant  $R_A$  fixe, exprimer la valeur minimale du rayon du conducteur externe pour laquelle le champ a la valeur maximale que l'isolant peut supporter, en fonction de  $R_A$ ,  $V_A$  et  $E_0$ .
- 5) Le rayon du conducteur interne  $R_A$  peut varier; les autres conditions étant les mêmes qu'au 4), calculer  $R_A$  et  $R_B$ , pour que la valeur de  $R_B$  soit minimale.  
 En déduire la valeur de  $c$  correspondante. Application numérique.

**E 21. Forces exercées sur les armatures d'un condensateur plan.**

Considérons un condensateur plan idéal dont les armatures, distantes de  $x$ , ont chacune pour surface  $S$ , et sont séparées par de l'air. Soit  $\pm\sigma$  les densités de charge portées par les armatures.

- 1) Placer les forces qui s'exercent sur chaque armature lorsqu'on établit une ddp  $U$  entre elles.
- 2) Soit  $\vec{E}$  le champ uniforme régnant entre les armatures. Exprimer  $\vec{E}$  en fonction de  $x$  et  $U$ .
- 3) Soit  $\vec{E}_B$  le champ créé par l'armature négative du condensateur.

On rappelle que  $\|\vec{E}_B\| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  : exprimer  $\vec{E}_B$  en fonction de  $\vec{E}$ . En déduire l'expression de  $\vec{E}_B$  en fonction de  $x$  et  $U$ .

- 4) En déduire la force  $\vec{F}_A$  qui s'applique sur l'armature positive en fonction de  $x$ ,  $S$ ,  $\epsilon_0$ ,  $U$ .
- 5) En déduire, en utilisant la relation  $\vec{F}_A = -\text{grad} \mathcal{E}_p$ , l'expression de l'énergie électrostatique en fonction de  $C$  et  $U$ .