E 60. Condition d'existence d'une onde électromagnétique.

Dans une région sans charge ni courants de conduction, on considère, dans le vide, les champs électrique et magnétique suivants :

$$\vec{E} = -\frac{ak^2y}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z \qquad \vec{B} = a.\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x + aky.\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

L'ensemble $(\vec{E},\vec{B})$ constitue-t-il une onde électromagnétique, et si oui, à quelle condition?

E 61. Champ électrique associé à un champ magnétique donné.

Dans une région sans charge, ni courants de conduction, on considère le champ magnétique dans le vide :

$\vec{B} = a\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x} + aky\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$ où a, k et ω sont des constantes.

Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ pour que $(\vec{E},\vec{B})$ constitue une onde électromagnétique. S'agit-il d'une onde progressive ? Si oui, selon quelle direction ?

E 62. Onde modulée.

Dans le vide, en l'absence de charge et de courant, à quelle condition le champ électrique $\vec{E} = a.\sin(\alpha x)\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$ est-il le champ électrique d'une onde électromagnétique?

E 63. Condition d'existence d'une onde électromagnétique.

Dans le vide, en l'absence de charge et de courant, l'ensemble des deux vecteurs $\vec{E} = E_0\sin(kz).\sin(\omega t).\vec{u}_x$ et $\vec{B} = B_0\cos(kz).\cos(\omega t).\vec{u}_y$ constitue-t-il une onde électromagnétique, et si oui à quelle condition ?

Cette onde est-elle progressive ?

E 64. Champ magnétique associé à un champ électrique donné.

Dans le vide, en l'absence de charge et de courant, on considère le champ électrique : $\vec{E} = E_0.\sin(kz).\cos(\omega t).\vec{u}_x$.

À l'aide des équations de Maxwell, déterminer le vecteur champ magnétique correspondant. A quelle condition ces deux champs représentent-ils une onde électromagnétique ? S'agit-il d'une onde progressive ? Si oui, selon quelle direction ?

E 65. Solution de l'équation d'onde.

On considère l'équation de propagation à une coordonnée d'espace de l'une des composantes de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$

$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. Vérifier qu'une fonction de la forme : $s(t,z) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right)$ satisfait cette équation, f et g étant deux fonctions.

E 66. Équation d'onde d'une onde sphérique

1) Rappeler l'expression de l'équation de propagation de l'une des composantes notée s de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

2) L'expression du laplacien en coordonnées sphériques pour une grandeur s ne dépendant que de $r = OM$ et de t est : $\Delta s = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial s}{\partial r}\right)$. Vérifier qu'une fonction de la forme $s(r,t) = \frac{1}{r}\left[f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)\right]$ (f et g étant deux fonctions) vérifie l'équation de propagation. Cette forme correspond aux ondes sphériques issues d'une source O.

E 69. Caractéristiques d'une onde.

Dans le vide, on considère une onde plane, progressive, monochromatique représentée en notation complexe par :

$\underline{\vec{E}} = E_0.e^{j(\omega t - kz)}\vec{u}_x$. Sa fréquence est 20 MHz, l'amplitude E_0 vaut 10 V.m^{-1}. On donne $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

1) Donner l'expression réelle de $\vec{E}$. Quelle est la direction de propagation de l'onde ? En déduire l'expression du champ magnétique associé $\vec{B}$.

2) À quelle type de polarisation a-t-on à faire ? Donner le cas échéant la direction de polarisation de l'onde.

3) Donner les caractéristiques de cette onde (toutes ne demandent pas un calcul) : amplitudes de E et B, vecteur d'onde, longueur d'onde. À quelle domaine du spectre électromagnétique appartient cette onde ?

E 70. Puissance rayonnée.

On considère l'onde électromagnétique dans le vide (avec $k^2 + \alpha^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$) :

$$\vec{E} = a.\sin(\alpha x)\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y \qquad \vec{B} = -\frac{a}{\omega}\left[k\sin(\alpha x)\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + \alpha\cos(\alpha x)\sin(\omega t - kz)\vec{u}_z\right]$$

1) Exprimer le vecteur de Poynting.
2) Calculer sa valeur moyenne.
3) En déduire la puissance moyenne rayonnée à travers la surface rectangulaire prise dans le plan de cote z_0 dont les sommets ont pour coordonnées $(0, 0, z_0)$, $(x_0, 0, z_0)$, $(0, y_0, z_0)$, (x_0, y_0, z_0).

E 72. Détection d'une onde électromagnétique.

Une onde électromagnétique plane, monochromatique de fréquence $f = 1$ MHz, polarisée rectilignement se propage dans le vide. L'amplitude du champ électrique est $E_0 = 10^{-4}$ V.m^{-1}. On donne : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} ; $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.
On pourra utiliser un repère cartésien tel que $\vec{E} = E\overrightarrow{u_y}$, $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ et $\vec{c} = c\overrightarrow{u_x}$.

1) Calculer l'amplitude B_0 du champ magnétique.
2) Cette onde est reçue sur un cadre formé de $N = 10$ spires carrées de côté $a = 0,3$ m, placé dans le plan xOy. À quelle condition sur la longueur d'onde peut-on considérer le champ magnétique comme uniforme sur le cadre ? Comment nomme-t-on cette approximation ? Est-elle justifiée ici ? Exprimer alors le flux magnétique à travers le cadre. En déduire le flux magnétique maximum ainsi que la valeur maximale de la f.é.m. induite (amplitudes).
3) Déterminer la valeur moyenne du module du vecteur de Poynting : < Π >.
4) Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique : < w >.
5) Cette onde est émise par une source ponctuelle rayonnant de manière isotrope dans un hémisphère.
Calculer la puissance moyenne rayonnée à $1\ 000$ km de la source (c'est-à-dire dans l'hémisphère centré sur la source et de rayon $R = 1000$ km).

Rép : $3,33.10^{-13}$ T ; … ; $1,88$ µV ; $1,33.10^{-11}$ W.m^{-2} ; $4,42.10^{-20}$ J.m^{-3} ; $83,56$ W

E 73. Détection d'une onde électromagnétique, influence de la fréquence.

Une onde électromagnétique plane, monochromatique, polarisée rectilignement suivant Oy se propage dans le vide suivant Ox. Soit ω la pulsation de l'onde et soit $E_0 = 1$ V.m^{-1} l'amplitude du champ électrique de cette onde.
L'onde est reçue sur un cadre rectangulaire placé dans le plan xOy de côtés $a = 0,3$ m, $b = 0,2$ m, un des grands côtés étant confondu avec Oy. Soit N = 20 le nombre de spires du cadre.

1) Exprimer la f.é.m. induite e dans le cadre, à partir du champ électrique. Montrer qu'en notation complexe, on obtient $\underline{e} = NE_0 a\mathrm{e}^{j\omega t}\left(1 - \mathrm{e}^{-jkb}\right)$
2) En déduire que l'amplitude de cette fém est $e_M = aNE_0\sqrt{2\left(1-\cos(kb)\right)}$
3) Calculer la valeur maximale e'_M approchée de cette f.é.m. induite en considérant le champ magnétique uniforme sur le cadre.
4) Calculer l'écart relatif $\dfrac{\Delta e}{e} = \dfrac{\left|e_M - e'_M\right|}{e_M}$

Faire l'application numérique pour les fréquences 10^7 Hz, 10^8 Hz, 10^9 Hz. Conclure.