

Objectifs : passer en revue les différentes questions posées au concours ATS depuis 2016.

1. ATS 2016

contexte

On admet que la Terre et son atmosphère constituent les deux armatures d'un condensateur sphérique. On représente l'ensemble Terre-ionosphère comme un volumineux condensateur sphérique. La Terre, de rayon R , se comporte comme un conducteur parfait de potentiel V_T , pris nul, et porte une charge négative $-Q$ uniformément répartie sur sa surface, tandis que l'ionosphère est représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R + z_0$, de potentiel V_{atm} . On suppose que l'atmosphère a la permittivité du vide.

On a calculé $\vec{E}(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

51) On souhaite calculer $\Delta V = V_{atm} - V_T$ en utilisant une procédure informatique d'intégration dite "méthode des rectangles", présentée ci-dessous :

```
function S=rectangles(a,b,n,f)
//méthode d'approximation dites des 'rectangles'
S=0
for i=0:n-1
    x1=a+i*(b-a)/n ;
    x2= a+(i+1)*(b-a)/n ;
    S=S+f((x1+x2)/2)*(x2-x1) ;
end
endfunction
```

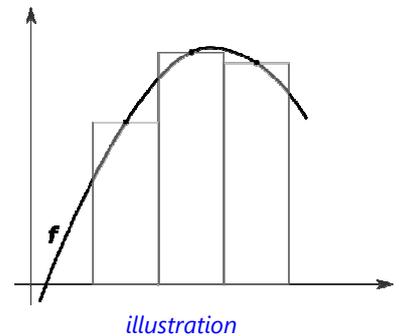
Figure 3 : intégration par la méthode des rectangles

Par identification avec les résultats précédents, donner les valeurs de a et b et l'expression de la fonction $f(x)$ utilisées dans la procédure ci-dessus.

indications :

En résumé, cette méthode consiste à faire l'approximation :

$$\int f(x) dx \approx \sum_i f(x_i) \Delta x ; \text{ voir l'illustration ci-contre.}$$



2. ATS 2017

contexte

Les deux électrodes d'un réacteur plasma sont des disques centrés sur l'axe z , de rayon $a/2$ et d'épaisseur négligeable. Elles sont parallèles et leur distance est notée d ($d > 0$). On applique une tension continue $U > 0$ entre les deux électrodes du réacteur. L'électrode supérieure porte alors une charge $-q$ et l'électrode inférieure une charge $+q > 0$. Le réacteur contient un gaz d'argon peu dense, encore non ionisé et de permittivité diélectrique assimilable à celle du vide, notée ϵ_0 .

L'étude faite en négligeant les effets de bords nous a conduit à $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ et $V(z) = U \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{d} \right)$

Évaluation des effets de bord

Dans ce paragraphe, on souhaite étudier comment la prise en compte des effets de bord affecte les résultats concernant le champ et le potentiel électrique obtenus précédemment. Pour faciliter l'étude, on se limitera à un problème à deux dimensions et on admettra que dans le plan $x = 0$, le potentiel électrostatique V satisfait l'équation de Laplace suivante * :

$$\frac{\partial^2 V(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(y, z)}{\partial z^2} = 0$$

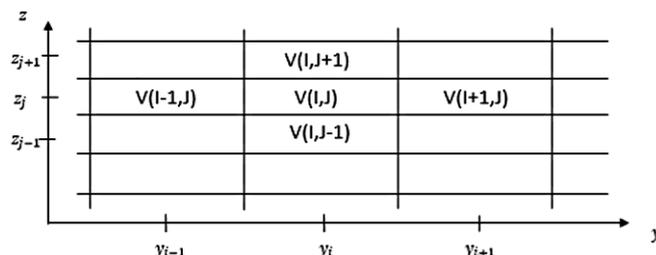
* L'équation de Laplace proposée ici s'obtient rigoureusement dans le cas d'un réacteur dont les électrodes sont assimilées à des plans rectangulaires de largeur finie (suivant y) et de longueur supposée infinie (suivant x). L'équation étudiée va donc mettre en évidence l'influence des effets de bord mais elle devrait être complétée pour décrire plus finement notre réacteur.

On souhaite écrire un programme informatique permettant de déterminer la fonction potentiel électrostatique dans le réacteur alimenté en ± 10 V. La solution de ce problème doit vérifier l'équation de Laplace ci-dessus et les conditions aux limites imposées au potentiel $V(y,z)$ par l'expérimentateur qui sont ici $V\left(y = \pm \frac{a}{2}; z\right) = 0$.

Dans ce programme, on va chercher à calculer le potentiel en différents points $(x = 0; y_i; z_j)$ du réacteur avec $(0 \leq z_j < 20)$ mm et $(-10 \leq y_i < +10)$ cm. Le potentiel est calculé tous les millimètres verticalement et horizontalement.

Ainsi, le potentiel est décrit dans un tableau de taille 201×21 (201 lignes \times 21 colonnes) où le réel $V_{i,j}$ contient la valeur en volt de $V(y_i, z_j)$.

Le tableau ci-contre représente une partie de la discrétisation de l'espace en cellules. $V_{i,j}$ est ici écrit $V(I,J)$.



Pour résoudre l'équation de Laplace, nous allons appliquer la méthode d'Euler. À titre d'exemple, cette méthode consiste

notamment à associer la dérivée partielle $\frac{\partial V(y,z)}{\partial y}$ à la quantité $\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta y}$. \hookrightarrow ajout du pas Δy

8. Écrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial V(y,z)}{\partial z}$ en fonction de Δz , $V_{i,j+1}$ et $V_{i,j}$.
9. Écrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial^2 V(y,z)}{\partial z^2}$ en fonction de Δz , $V_{i,j+1}$, $V_{i,j-1}$ et $V_{i,j}$.
10. Écrire alors la définition à donner à $V_{i,j}$ avec la méthode d'Euler, en fonction de $V_{i+1,j}$, $V_{i,j+1}$, $V_{i-1,j}$ et $V_{i,j-1}$

3. ATS 2018

contexte

Une plaque à induction rayonne un champ magnétique. Nous allons supposer, pour simplifier, que ce champ magnétique est analogue à celui créé par une bobine circulaire (P) comportant N spires d'axe Oz , filiformes, jointives et de rayon a . La casserole est modélisée par une spire (S) parallèle à (P) et située à une distance z de (P).

Force magnétique

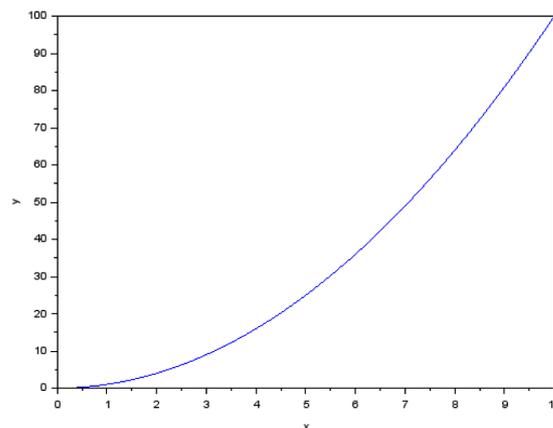
En tenant compte de l'inductance propre associée à (S) et en prenant une description plus complète du champ magnétique créé par (P), on montre que (S) est soumise à une force de Laplace \vec{F} dont la moyenne temporelle $\langle \vec{F} \rangle$ est donnée par :

$$\langle \vec{F} \rangle \approx K_3 \frac{Z}{(1+Z^2)^4} \vec{u}_z \text{ avec } Z = \frac{z}{a} \text{ et } K_3 \approx 1 \text{ N.}$$

On souhaite apprécier la valeur maximale de la force de Laplace pouvant s'exercer sur (S). Pour cela, on va utiliser l'outil informatique. On donne ci-dessous un exemple de programmation sous Scilab permettant d'obtenir le graphe de la fonction x^2 .

```

1 function y=f(x)
2     y=x^2
3 endfunction
4 x=linspace(0,10,100)
5 plot(x,f)
6 xlabel("x"); ylabel("y")
    
```



- 48) Réécrire le programme précédent sur votre copie en l'adaptant afin d'obtenir le graphe de $\frac{Z}{(1+Z^2)^4}$ en fonction de Z pour $Z \in [0, 2]$ en utilisant 100 points (les axes devront également être renommés).

4. ATS 2019

contexte

Comment se protéger de la foudre ?

Un coup de foudre est associé à un courant de forte intensité et de courte durée. La mesure de l'intensité du courant $i(t)$ conduit typiquement au graphe ci-contre. Avec :

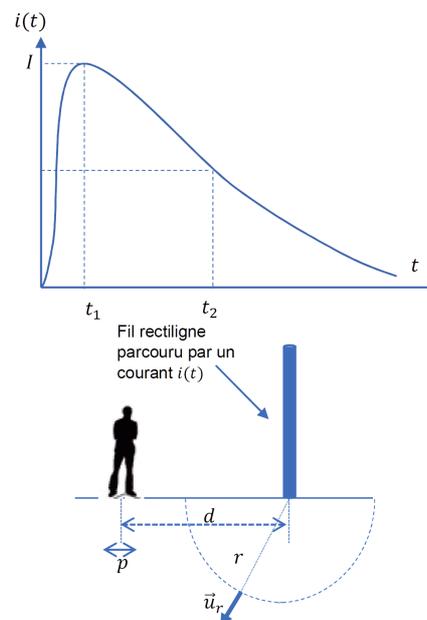
- un temps de montée $t_1 = 2$ ms
- un temps de retombée à la demi-valeur $t_2 = 25$ ms
- un courant de crête $I = 15$ kA

Un éclair est associé à un courant électrique assimilable à celui d'un fil rectiligne, parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ uniformément réparti. Dans le sol, on suppose que la densité de courant volumique est radiale, de la forme $\vec{j} = j(r,t)\vec{u}_r$ où \vec{u}_r est le vecteur unitaire radial de la base sphérique. Un homme se trouve à la distance moyenne d du point d'impact de la foudre et la distance entre ses pieds est notée p .

On a montré que l'expression de la différence de potentiel $U_p > 0$ entre les pieds de l'homme peut se mettre sous la forme $U_p = Ri$ avec

$$R = \frac{2p}{\pi\gamma(4d^2 - p^2)}$$

On prend $\gamma = 1 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, $p = 0,5$ m et $d = 1$ m. On assimile par la suite la fonction $i(t)$ à une fonction affine par morceaux.



question

- 14) Le programme Scilab ci-dessous permet d'obtenir le tracé de l'intensité $i(t)$ du courant. En vous aidant de ce programme, écrire sur votre copie les lignes de code supplémentaires permettant d'obtenir le graphe de $U_p(t)$.

```
//constantes
gam=1
p=0.5
d=1
t1=2*10^-3
t2=25*10^-3
Imax=15*10^3
R=p/(2*pi*gam*(d^2-(p^2)/4))

//Définitions

function I=i(t)
  if t<=t1
    I=Imax*t/t1
  else
    I=-Imax/(3*t2)*(t-t1)+Imax
  end
endfunction

function L=liste_valeurs_i(liste_t,i)
  L=[]
  for t = liste_t
    L($+1)=i(t)
  end
endfunction

//tracé
// Scilab → "ATTENTION : Transposition du vecteur ligne X pour obtenir des dimensions compatibles"

liste_t=linspace(0,3*t2,1000)
liste_i=liste_valeurs_i(liste_t,i)
plot(liste_t,liste_i)
plot(liste_t',liste_i)
xlabel("temps (s)")
ylabel("i (A)")
title("i(t)")
```

5. ATS 2020

contexte

Détermination expérimentale de la conductivité thermique d'un métal.

On considère une tige en fonte, cylindrique, de rayon a et de longueur L .

- On suppose le régime stationnaire atteint. On a $L = 1,0 \text{ m}$, $a = 0,50 \text{ cm}$ donc $L \gg a$.
- On note c la capacité thermique massique de la tige assimilée à une phase condensée indilatable et incompressible, on note ρ sa masse volumique et λ sa conductivité thermique. On prendra $c = 400 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $\rho = 5000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- On note h le coefficient de transfert conducto-convectif. Une expérience précédente permet d'obtenir la valeur du rapport $\frac{\lambda}{h}$ ici estimée à $\frac{\lambda}{h} \approx 4 \text{ SI}$.

Traitement informatique

Dans une seconde expérience, on place intégralement la tige dans un bain d'eau glacée de manière à ce que cette dernière atteigne la température $T_o = 0 \text{ }^\circ\text{C}$. À $t=0$, on fixe la tige refroidie à une potence afin qu'elle se réchauffe au contact de l'air ambiant à la température $T_{ext} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$. Avec ce mode opératoire, on montre que la conduction thermique au sein de la tige est négligeable et que seul le transfert conducto-convectif est à prendre en compte. Le champ des températures T de la tige est quasi-uniforme et n'est fonction que du temps lors de ce chauffage monobare. Un bilan enthalpique aboutit alors à l'équation :

$$\frac{dT(t)}{dt} + kT(t) = kT_{ext} \quad \text{où} \quad k = \frac{2h}{\rho ca}$$

La température T exprimée en $^\circ\text{C}$ suit alors l'expression : $T(t) = 30 \times (1 - e^{-kt})$

En plaçant un capteur de température au centre de la tige, on obtient N valeurs $T_{i,exp}$ de températures aux instants $t_{i,exp}$. Un traitement informatique permet alors d'obtenir deux tableaux accessibles sur un programme Scilab :

- `tab_temps` qui recense les instants $t_{i,exp}$ des mesures.
- `tab_T` qui contient les valeurs $T_{i,exp}$ des températures mesurées.

On cherche maintenant à déterminer la valeur de k telle que $T(t) = 30 \times (1 - e^{-kt})$ puisse effectivement correspondre aux points expérimentaux à l'aide de Scilab en s'inspirant de la méthode des moindres carrés.

- 21)** Écrire une fonction `Temp(t, k)` prenant en arguments d'entrée un tableau `t` de nombre décimaux et un nombre décimal `k` et renvoyant un tableau, noté `tab_Ttheo`, contenant les valeurs vérifiant $T_{i,theo} = 30 \times (1 - e^{-kt_i})$ pour tous les éléments t_i du tableau `tab_temps`.

Pour la question suivante, on pourra utiliser `sum(tableau)` qui renvoie la somme de tous les éléments d'un tableau.

- 22)** Écrire une fonction `erreur(k)` prenant pour argument un nombre décimal `k` et renvoyant la quantité
$$e = \sum_{i=1}^N (T_{i,exp} - T_{i,theo})^2$$
 donnant la somme du carré des écarts entre les températures expérimentales $T_{i,exp}$ et les températures $T_{i,theo}$ vérifiant la loi recherchée.

Dans la suite, on cherche à déterminer précisément la valeur du paramètre k qui permet de minimiser e . Dans notre cas, on estime manuellement que $(10^{-4} \leq k \leq 10^{-2}) \text{ s}^{-1}$.

- 23)** Proposer un algorithme utilisant une boucle `for` et permettant d'obtenir un tableau, noté `tab_e()`, contenant les valeurs de e calculées pour 100 valeurs de k comprises dans l'intervalle 10^{-4} s^{-1} et 10^{-2} s^{-1} . On pourra utiliser `linspace(x1, x2, n)` qui renvoie un tableau de n éléments régulièrement espacés entre `x1` et `x2`.

6. ATS 2021

contexte

Nous nous intéressons ici au temps de réponse d'un capteur de température présent dans un smartphone.

Nous allons assimiler ce capteur à une phase solide idéale, et nous admettons la loi de Newton décrivant la puissance thermique P algébriquement reçue par le capteur.

On souhaite tester le modèle précédent. On place alors le téléphone étudié dans un réfrigérateur à la température $T_0 = 5\text{ °C}$ suffisamment longtemps pour que le capteur atteigne cette température T_0 . À $t=0$, on expose le téléphone à une température $T_{\text{ext}} = 20\text{ °C}$.

On montre alors que $T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{-\frac{t}{\tau}}$, τ étant le temps caractéristique du régime transitoire, la température se stabilisant au bout de quelques τ .

question

Les valeurs des températures mesurées depuis l'instant $t=0$ sont reportées dans un fichier nommé *mesures.csv*.

Sous Scilab, on peut récupérer ces données dans un tableau, appelée *M*, avec la ligne de code ci-dessous :

```
M=csvRead("mesures.csv");
```

Ci-contre est affiché le tableau *M*.

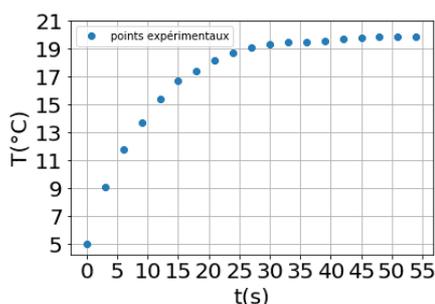
La première colonne contient les instants d'acquisition et la deuxième colonne contient les températures associées à ces instants d'acquisition.

19) Écrire un programme permettant :

- d'obtenir deux tableaux à une dimension appelés t et T contenant respectivement les valeurs des temps d'acquisition et les valeurs des températures mesurées ;
- d'afficher le graphe expérimental $T(t)$.

Précision : le graphe devra comporter un titre et un étiquetage des axes.

On obtient le graphe expérimental ci-dessous :



```
--> M
M =
0.    5.
3.    9.1
6.   11.8
9.   13.7
12.  15.4
15.  16.7
18.  17.4
21.  18.2
24.  18.7
27.  19.1
30.  19.3
33.  19.5
36.  19.5
39.  19.6
42.  19.7
45.  19.8
48.  19.9
51.  19.9
54.  19.9
```

7. ATS 2022

contexte

Chute d'un grêlon avec frottements quadratiques.

On considère un grêlon de masse m , qui chute dans le champ de pesanteur \vec{g} . On note z un axe descendant vers le sol. $z = 0$ marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note \vec{e}_z un vecteur unitaire orienté vers le bas. On prend en compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v} = v(t)\vec{e}_z$ la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire : $\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par $\alpha = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \pi R^2 C$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \approx 0,5$.

On montre alors que la vitesse obéit à l'équation différentielle $\dot{v} + \frac{\alpha}{m} v^2 = g$ qui conduit à une vitesse limite $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$.

questions

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les hypothèses et notations sont toujours les mêmes. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en Scilab retranscrit ci-dessous :

```
g = 9.8
alpha = 1.5e-3
m = 0.24
dt = 0.02 // pas d'intégration en secondes
```

```

fin = 15 // durée de la simulation en secondes

t(1) = 0 // temps initial
z(1) = 0 // position initiale
v(1) = 0 // vitesse initiale

nb_iterations = int(fin/dt)
// pour information int = troncature (arrondi par suppression des décimales)
for i=1:nb_iterations
t(i+1) = t(i) + dt
z(i+1) = [case 1 à compléter]
v(i+1) = [case 2 à compléter]
end

```

Les valeurs de m et α sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grélon de diamètre 8 cm.

33 - Compléter la case 1 de l'algorithme.

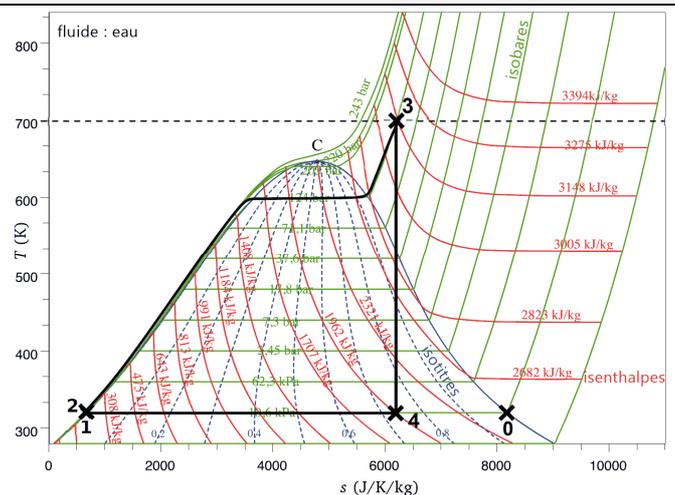
34 - Compléter la case 2 de l'algorithme.

8. ATS 2023

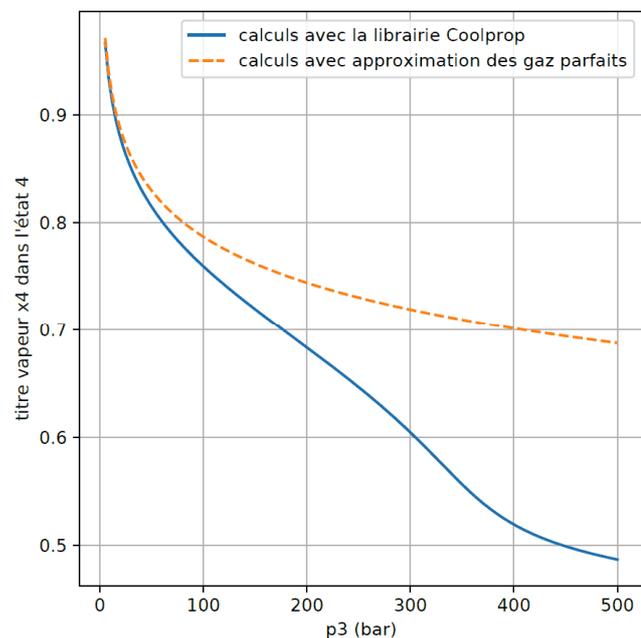
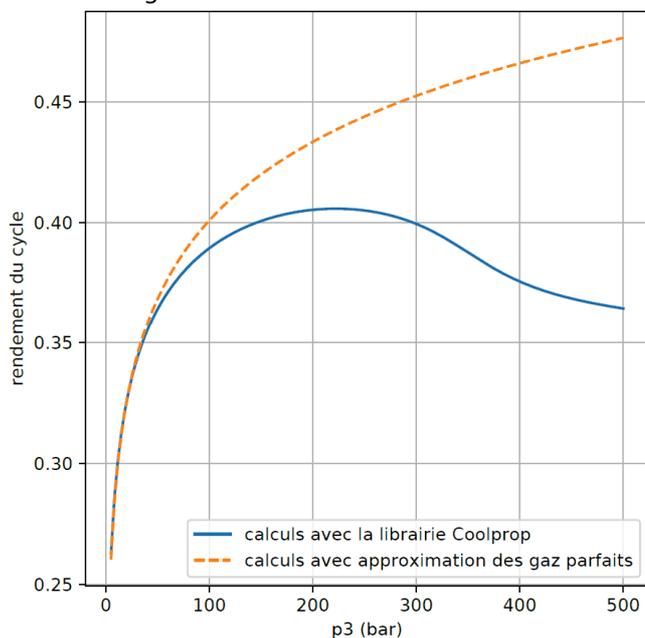
contexte

Nous étudions ici le cycle thermodynamique suivi par de l'eau, dans un exemple simplifié et typique de ce qui est mis en œuvre dans une centrale thermique de puissance moyenne (5 à 20 MW).

On montre que le cycle a l'allure suivante →



On fournit également ce document :



Document 12 : rendement du cycle (à gauche) et titre en vapeur dans l'état 4 (à droite) en fonction de la valeur choisie pour la pression p_3 . Ici $T_3 = 700$ K est fixé et l'état 1 est toujours le même. Courbes en traits pointillés : d'après les expressions approchées établies dans la sous-partie III.2. Courbes en traits pleins : calculs réalisés avec la librairie Coolprop (qui sert aussi au tracé du diagramme T-s de l'énoncé).

Recherche du rendement maximal

Cette sous-partie mobilise des capacités numériques et peut être traitée sans avoir abordé les autres.

On dispose de tableaux qui contiennent les données suivantes :

- p_3 contient des valeurs de pression allant de 5 bar à 500 bar avec $N=150$ valeurs.
- η_a contient les valeurs calculées pour le rendement, c'est-à-dire que $\eta_a(i)$ est la valeur du rendement lorsque la pression p_3 vaut $p_3(i)$. Ces valeurs correspondent à la courbe en trait plein du graphique de gauche du document 12.
- De même, x_4 contient les valeurs calculées pour le titre en vapeur dans l'état 4 (courbe en trait plein du graphique de droite du document 12).

Il apparaît graphiquement que le tableau η_a admet une valeur maximale (courbe en trait plein du graphique de gauche du document 12), dont on cherche à déterminer la valeur à l'aide d'un algorithme écrit dans le langage Scilab :

```

maxi = 0
imax = 0

for i=1:150
    if eta(i) >= maxi then
        [bloc 1 à compléter]
    end
end

disp(imax) // affichage dans la console
disp(maxi) // affichage dans la console
[bloc 2 à compléter]

```

- 42 - Proposer les instructions manquantes dans le bloc 1 ci-dessus, afin que le programme affiche la valeur maximale du tableau η_a , ainsi que l'indice i qui correspond.
- 43 - Proposer les instructions manquantes dans le bloc 2 ci-dessus, afin que le programme affiche également les valeurs de la pression p_3 et du titre x_4 correspondant au maximum de η_a .