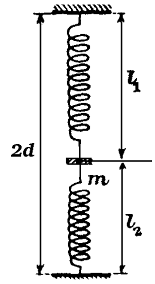
M 15. Force gravitationnelle et force électrostatique.
On donne les valeurs de la constante de gravitation et de la permittivité diélectrique du vide : $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ USI ; $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}$ USI. On indique par ailleurs que les forces gravitationnelle et électrostatique ont des intensités s'exprimant respectivement par : $f_G = \mathcal{G}\dfrac{mm'}{r^2}$ et $f_E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|qq'|}{r^2}$, où r désigne la distance séparant les barycentres de deux masses m et m' ou de deux charges q et q'. Calculer les forces gravitationnelle et électrostatique :
1) entre la Terre et la Lune (m_T=$5{,}98.10^{24}$ kg $+10^7$ kg/an ; m_L=$7{,}34.10^{22}$ kg ; distance moyenne Terre-Lune = $3{,}84.10^8$ m).
2) entre le proton et l'électron d'un atome d'hydrogène ($m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $m_p = 1836.m_e$; distance moyenne électron-proton = $5{,}3.10^{-11}$ m ; $q_p = -q_e = 1{,}6.10^{-19}$ C).

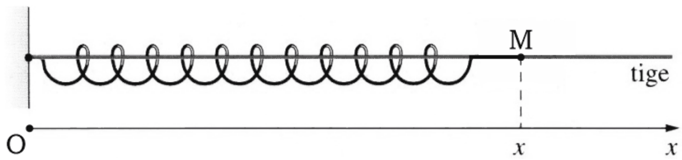
M 21. Équilibre d'une masse suspendue à un ressort
Considérons un ressort vertical, de masse négligeable, maintenu par son extrémité supérieure à un point fixe O. Ses caractéristiques sont : longueur à vide $l_V = 0{,}1$ m, raideur $k = 20$ N·m^{-1}.
1) Quelle est la longueur du ressort dans ces conditions ?
2) On suspend une masse ponctuelle $m = 0{,}1$ kg à l'extrémité libre du ressort. Comment évolue sa longueur ?
3) Effectuer l'inventaire des forces subies par la masse et les représenter sur un schéma. Traduire l'équilibre de la masse pour en déduire la longueur l du ressort en fonction de l_V, k, m, et g l'intensité de la pesanteur.
Application numérique : On prendra $g = 10$ m·s^{-2}.

M 22. Masse ponctuelle liée à deux ressorts.
Une masse m de dimension négligeable par rapport à l_1 et l_2 est reliée à deux ressorts identiques placés verticalement. Les extrémités des ressorts sont distantes de $2d$. Chaque ressort non tendu a une longueur $l_V < d$; sa raideur est k.
1) Calculer à l'équilibre les longueurs l_1 et l_2 des ressorts.
2) Montrer que si $mg \ll 2kd$, on peut prendre $l_1 = l_2$. Signification ?



M 23. Chute libre.
Soit un point M de masse m lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur $z_i = 12$ m, repérée sur un axe vertical Oz, d'origine O coïncidant avec le sol. On négligera les frottements de l'air durant la chute supposée verticale de la masse.
1) En utilisant le PFD, déterminer l'équation différentielle du mouvement.
2) La résoudre pour trouver $z(t)$.
3) Calculer la vitesse atteinte au moment de l'impact avec le sol.

M 24. Mouvement horizontal d'un ressort.
Un point M de masse m peut coulisser sans frottements le long d'une tige horizontale. Il est attaché à un ressort horizontal de longueur à vide ℓ_V et de constante de raideur k. L'élongation du système à la date t est repérée sur un axe Ox parallèle à la tige, l'origine O de cet axe correspondant à l'extrémité fixe du ressort.



1) Quelle est la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre ?
2) À $t = 0$, on écarte M de sa position d'équilibre, vers la droite, d'une quantité X, et on le lâche, sans vitesse initiale.
Utiliser le PFD pour trouver l'équation différentielle du mouvement. On mettra celle-ci sous la forme : $\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = \omega_0{}^2 x_{eq}$.
Exprimer ω_0 (pulsation propre) en fonction de k et m. Vérifier la validité de x_{eq}.
3) On pose $u = x - l_V$. En déduire l'équation différentielle sous la forme $\ddot{u} + \omega_0{}^2 u = \omega_0{}^2 u_{eq}$. Que vaut u_{eq} ?
4) Résoudre cette équation différentielle pour trouver $u(t)$.
5) En déduire $x(t)$. Tracer le graphe de $x(t)$. Quelle est la période T_0 du mouvement ? Donner la relation entre T_0 et ω_0.
6) On tient compte maintenant de frottements fluides subis par la masse, sous la forme d'une force $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, avec $\lambda < 2\sqrt{mk}$. Que devient l'équation différentielle en x ?
7) [CHAPITRE "OSCILLATIONS LIBRES"] La résoudre pour trouver $x(t)$.

M 25. Équilibre sur un plan incliné
Soit un point M de masse m maintenu sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale par un fil inextensible attaché en O. On négligera les frottements entre le plan et la masse.
1) Placer sur un schéma les forces subies par la masse.
2) Traduire l'équilibre de la masse pour en déduire la valeur de la tension du fil.

M 26. Brouillard, brume et purée de pois.

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids et à l'action de l'air. En négligeant la poussée d'Archimède, nous supposons que cette action de l'air se réduit à des frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$. On abandonne une goutte d'eau sans vitesse initiale et en atmosphère calme. On admettra que le mouvement a lieu selon l'axe vertical Oz, que l'on orientera vers le bas.

1) Montrer sans calcul, en étudiant l'évolution au cours du mouvement des forces subies par la goutte, que celle-ci atteint une vitesse limite.

2) Exprimer le module $v_{\ell im}$ de cette vitesse limite en fonction de m, λ et g.

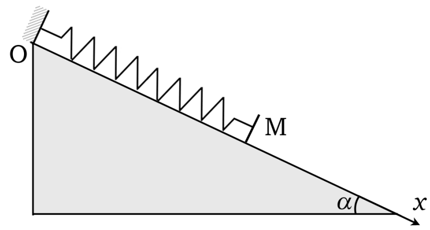
3) Déduire du PFD l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la vitesse.

On mettra cette équation différentielle sous la forme $\dot{v} + \dfrac{v}{\tau} = \dfrac{v_L}{\tau}$, où τ désigne le temps caractéristique du mouvement, que l'on exprimera en fonction de λ et m. Vérifier que $v_L = v_{\ell im}$.

4) Résoudre cette équation pour trouver l'expression de la vitesse en fonction du temps. Tracer le graphe de $v(t)$.

5) Application numérique : $m = 1{,}00.\ 10^{-6}$ kg ; $g = 9{,}81$ m·s^{-2}, $v_L = 5{,}00.\ 10^{-3}$ m·s^{-1}. Calculer la durée de la chute pour que la vitesse limite soit atteinte à 10^{-2} près en valeur relative.

M 27. Oscillations sur un plan incliné



Soit un point M de masse m maintenu sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale par un ressort attaché en O, de raideur k et de longueur à vide l_V. On négligera les frottements exercés par le plan et l'air. On utilisera l'axe Ox indiqué sur le schéma ci-contre.

1) Quelle est la longueur du ressort à l'équilibre ?

2) À $t = 0$, la masse étant dans sa position d'équilibre, on lui communique une vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0 \overrightarrow{u_x}$, avec $v_0 > 0$.

Utiliser le PFD pour trouver l'équation différentielle du mouvement ultérieur de M. On mettra celle-ci sous la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$. Exprimer ω_0 en fonction de k et m. Vérifier la validité de x_{eq}.

3) Résoudre cette équation différentielle.

On rappelle qu'on peut mettre x sous la forme $x = x_H + x_P$, x_H désignant la solution de l'équation homogène et x_P la solution particulière.

M 28. Mouvement d'un skieur

On étudie le mouvement d'un skieur de masse m descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant l'angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$, où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ la vitesse du skieur.

On note $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottement exercée par la neige et μ le coefficient de frottement solide tel que $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$.

On choisit comme origine de l'axe Ox de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note Oy la normale à la piste dirigée vers le haut.

1) Exprimer $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$ en fonction des données.

2) Calculer la vitesse $\vec{v}$ et la position x du skieur à chaque instant.

3) a) Montrer que le skieur atteint une vitesse limite $\overrightarrow{v_L}$ et calculer $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{v_L}$.

b) Application numérique : calculer v_L avec $\lambda = 1$ S.I. ; $\mu = 0{,}9$; $g = 10$ m.s^{-2}, $m = 80$ kg et $\alpha = 45°$.

M 29. Ralentissement d'une voiture. *

Une automobile de masse $m = 10^3$ kg est équipée d'un moteur d'une puissance maximale $\mathscr{P}_M = 50$ kW. Avec cette puissance, la voiture atteint la vitesse maximale $v_M = 144$ km.h^{-1}, sur un axe horizontal Ox.

1) En supposant que les forces de frottement que subit la voiture sont essentiellement dues à l'air, et de la forme $\vec{f} = -kv^2 \overrightarrow{u_x}$ (v étant la vitesse, et k une constante), calculer le temps τ nécessaire pour que, en roue libre (moteur débrayé), la voiture ralentisse de sa vitesse maximale jusqu'à la moitié de cette valeur. Quelle est la distance D parcourue pendant ce temps ?

2) Quelle distance la voiture parcourra-t-elle avant de s'arrêter ? Que pensez-vous de ce résultat ?