M30. Énergie cinétique d'un véhicule
1) influence de la vitesse
Une voiture de masse 800 kg a une vitesse qui passe de $50{,}0$ km·h^{-1} à $90{,}0$ km·h^{-1}. De combien varie son énergie cinétique ?
2) influence de la masse
Une voiture de 800 kg et un poids-lourd de $40{,}0$ t roulent tous les deux à $50{,}0$ km·h^{-1}. Calculer leurs énergies cinétiques.

M 31. Ordres de grandeur
Estimer l'énergie cinétique :
1) d'une voiture roulant sur l'autoroute,
2) d'un homme qui marche,
3) de la Terre par rapport au Soleil ($m \approx 6.10^{24}$ kg, la lumière met environ 8 minutes pour parcourir la distance Soleil-Terre).
4) À titre d'information, les munitions d'airsoft sont légalement limitées à des énergies cinétiques de 2 J. Un "petit" objet comme une balle devient mortel dès 50 J. Pourquoi est-ce qu'un gros objet de même énergie cinétique ne l'est pas nécessairement ?

Rép : 10^6 J ; 10^2 J ; 10^{33} J

M 32. Énergie potentielle de pesanteur.
Retrouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en utilisant l'expression d'une force en fonction de son énergie potentielle.

M 33. Champ gravitationnel.
1) Soit $\overrightarrow{F_{OP}}$ la force gravitationnelle exercée par la masse M placée en O sur la masse m placée en P. Lorsque les masses sont distantes de r, on indique que l'énergie potentielle associée s'exprime par $\mathscr{E}_p\left(\overrightarrow{F_{OP}}\right) = -\mathscr{G}\frac{Mm}{r}$, $\mathscr{G} = 6{,}67.10^{-11}$ SI désignant la *constante de gravitation*. En déduire l'expression de la force $\overrightarrow{F_{OP}}$.
2) On définit le champ de gravitation $\vec{G}$ créé par la masse M de barycentre O par $\overrightarrow{F_{OP}} = m\vec{G}$, $\overrightarrow{F_{OP}}$ représentant la force gravitationnelle exercée par la masse M sur une masse m de barycentre P. En admettant que $\overrightarrow{F_{OP}}$ garde la même expression que lorsqu'elle s'exerce entre deux masses ponctuelles, calculer l'intensité du champ de gravitation à la surface de la Terre, connaissant la masse de la Terre $M = 5{,}98.10^{24}$ kg, son rayon $R = 6{,}37.10^6$ m, et $\mathscr{G}$. Quelle est l'unité de $\mathscr{G}$?

M 35. La camionnette : chapitre 1, la mise en route
1) Une camionnette pesant $6{,}00$ tonnes, considérée comme ponctuelle, part du repos sur une voie horizontale et acquiert une vitesse de $45{,}0$ km.h^{-1} sous l'action d'une force motrice $\vec{F}$ constante. Les diverses résistances passives (frottements, liaisons imparfaites) qui agissent sur le véhicule équivalent à une force R_T de 250 N et on admettra que ces résistances sont indépendantes de la vitesse. Calculer la force motrice en supposant que la vitesse est acquise en $1{,}00$ min.
2) Calculer le travail de la force motrice pendant cette phase de démarrage.
3) On règle alors la force motrice de façon à maintenir constante cette valeur de $45{,}0$ km·h^{-1}, quelle est la puissance fournie par le moteur?

Rép : $1{,}50$ kN ; 563 kJ ; $3{,}1$ kW

M 36. La camionnette : chapitre 2, en montée
La camionnette de $6{,}00$ tonnes aborde maintenant une montée dont la déclivité est de $1{,}00$ % (soit 1 cm par mètre parcouru), à la vitesse de $45{,}0$ km·h^{-1}.
1) On supprime la force motrice. Calculer la longueur L_1 du chemin parcouru avant l'arrêt si on néglige les résistances au mouvement, c'est-à-dire en prenant $R_T = 0$.
2) Même question, en tenant compte de $R_T = 250$ N. On notera L_2 la nouvelle longueur.
3) La force motrice est toujours coupée en bas de la pente, et R_T est prise en compte. Si, pour éviter un obstacle, on arrête la camionnette au moyen de freins, après un parcours de $L_3 = 100$ m sur la pente, quelle sera le travail W_{FR} de la force de freinage ? On prendra $g = 9{,}81$ m·s^{-2}.
4) Pour finir, on souhaite maintenant faire parcourir 100 m à la camionnette, à la vitesse constante de $45{,}0$ km·h^{-1}. On tient toujours compte de $R_T = 250$ N. Quel doit être le travail de la force motrice ?

Rép : 796 m ; 559 m ; -385 kJ ; 84 kJ

M 37. Équilibre d'une masse suspendue à un ressort (reprise)

Considérons un ressort vertical, de masse négligeable, maintenu par son extrémité supérieure à un point fixe O. Ses caractéristiques sont : longueur à vide $l_V = 0{,}1$ m, raideur $k = 20$ N·m^{-1}. On suspend à ce ressort une masse $m = 0{,}1$ kg.

1) Soit Ox l'axe vertical descendant. Exprimer l'énergie potentielle de la masse en fonction de sa position x. On la mettra sous la forme $Ax^2 + Bx + C$.

2) Étudier la fonction $\mathscr{E}_p(x)$ et tracer l'allure de son graphe pour trouver la position d'équilibre.

On prendra $g = 10$ m·s^{-2} et $C = 0{,}1$ J.

M 38. Chute libre (reprise)

Soit un point M de masse m lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur $z_i = 12$ m, repérée sur un axe vertical ascendant Oz, d'origine O coïncidant avec le sol. On négligera les frottements de l'air durant la chute supposée verticale de la masse.

1) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, calculer la vitesse atteinte au moment de l'impact avec le sol.

2) Exprimer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique en une position quelconque z. Tracer sur un même graphe les fonctions $\mathscr{E}_p(z)$, $\mathscr{E}_c(z)$ et $\mathscr{E}_m$.

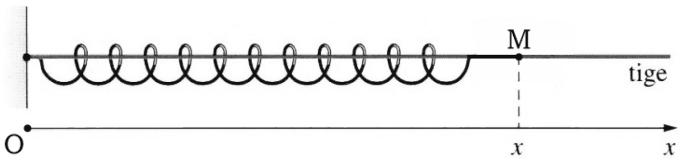
3) Exprimer l'énergie mécanique à un instant quelconque et utiliser le théorème de l'énergie mécanique (forme instantanée) pour en déduire l'équation différentielle du mouvement.

4) La résoudre pour trouver $z(t)$.

5) Retrouver le résultat du 1) sans utiliser les énergies.

M 39. Mouvement horizontal d'un ressort (reprise).

Un point M de masse m peut coulisser sans frottements le long d'une tige horizontale. Il est attaché à un ressort horizontal de longueur à vide l_V et de constante de raideur k. L'élongation du système à la date t est repérée sur un axe Ox parallèle à la tige, l'origine O de cet axe correspondant à l'extrémité fixe du ressort.

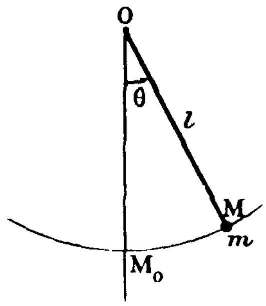


À $t = 0$, on écarte M de sa position d'équilibre, vers la droite, d'une quantité X, et on le lâche, sans vitesse initiale.

1) L'environnement du point est-il conservatif ? Exprimer l'énergie potentielle de M.
2) Exprimer l'énergie mécanique de M.
3) Utiliser le théorème de l'énergie mécanique (forme instantanée) pour trouver l'équation différentielle du mouvement. On mettra celle-ci sous la forme : $\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = \omega_0{}^2 x_{eq}$. Exprimer ω_0 en fonction de k et m. Retrouver la valeur de x_{eq} trouvée en M24.
4) Résoudre cette équation différentielle pour trouver $x(t)$.

M 40. Énergie d'un pendule pesant simple.

Une masse m est fixée à l'une des extrémités d'une tige rigide de masse négligeable, de longueur l. L'ensemble est mobile dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par le point O situé à l'autre extrémité. Les liaisons sont parfaites, les frottements sont négligés. À l'instant $t = 0$, la masse passe à la verticale de O avec la vitesse v_0 dans le sens direct. On utilisera un axe Ox vertical descendant.



1) Exprimer l'énergie potentielle de la masse en fonction de x , puis en fonction de θ.

Nous convenons de prendre égale à zéro la valeur de l'énergie potentielle de la masse dans sa position basse M_0.

2) Tracer le graphe $\mathscr{E}_p(\theta)$, pour $-2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
3) Exprimer l'énergie mécanique en fonction de v_0.
4) Discuter l'allure du mouvement et en donner les bornes suivant les valeurs de v_0.
5) Donner l'équation horaire $\theta(t)$ dans le cas du mouvement borné et pour $v_0 \ll 2\sqrt{gl}$:

M 41. Ressort comprimé

Considérons un ressort vertical, de masse négligeable, maintenu par son extrémité inférieure à un point fixe O. Ses caractéristiques sont : longueur à vide $l_V = 10$ cm ; raideur $k = 17$ N·m^{-1}. On fixe une masse $m = 100$ g sur l'extrémité libre du ressort. On nomme Oz l'axe vertical ascendant. On donne $g = 9{,}81$ m·s^{-2}.

1) Effectuer le bilan des forces subies par la masse pour en déduire son l'énergie potentielle en fonction de sa position z. On conviendra de prendre l'origine des énergies potentielles en $z = 0$.

2) Placer sur un même graphe, en fonction de z, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle élastique et l'énergie potentielle globale de la masse. Calculer l'énergie potentielle pour $z = 10$ cm et $z = 0{,}1$ mm (en supposant cette valeur possible). Quelles valeurs de z conduisent à $\mathscr{E}_p(z) = 0$?

3) Étudier la fonction $\mathscr{E}_p(z)$ pour en déduire la position d'équilibre. Calculer l'énergie potentielle correspondante.

M 42. Vitesse de libération.

L'énergie potentielle d'une masse m soumise au champ de gravitation terrestre est de la forme : $\mathscr{E}_p = -\mathscr{G}\frac{mM_T}{r}$, où $\mathscr{G}$ désigne la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre, et r la distance de la masse ponctuelle au centre de la Terre ($r >$ rayon terrestre). *Données :* $R_T = 6370$ km ; $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg ; $\mathscr{G} = 6{,}67.10^{-11}$ SI.

1) Dans tout l'exercice, les frottements seront négligés. Quelle approximation peut-on alors faire sur l'énergie mécanique ?

2) Faire un schéma à un instant quelconque et faire apparaître r.

3) Représenter l'allure du graphe de la fonction $\mathscr{E}_p(r)$.

4) Soit $\mathscr{E}_{m1} < 0$. Placer cette valeur sur le graphe précédent. Tracer la courbe $\mathscr{E}_{m1} - \mathscr{E}_p$. En déduire graphiquement le domaine de définition de r, c'est-à-dire l'intervalle $[r_{\min} ; r_{\max}]$.

5) Soit $\mathscr{E}_{m2} > 0$. Placer cette valeur sur le graphe précédent. Tracer la courbe $\mathscr{E}_{c2} = \mathscr{E}_{m2} - \mathscr{E}_p$. Calculer la "vitesse à l'infini", plus précisément $\lim\limits_{r\to+\infty} v_2$, en fonction de $\mathscr{E}_{m2}$ et m.

6) En utilisant le graphique, trouver la condition sur l'énergie mécanique pour qu'une sonde puisse quitter définitivement le champ de gravitation terrestre, c'est-à-dire s'éloigner infiniment de la Terre.

7) En déduire la vitesse minimale v_L (appelée vitesse de libération ou 2^{e} vitesse cosmique) à lui communiquer.

8) Retrouver ce résultat en traduisant la conservation de l'énergie mécanique entre deux positions bien choisies.

M 44. Fission nucléaire.

Quand un noyau d'uranium (U, $Z=92$) se désintègre avec émission d'une particule α (He^{2+}), le noyau résultant, considéré comme fixe, est celui du thorium (Th, $Z=90$). On supposera la particule α initialement à $8{,}5.10^{-15}$ m du centre du noyau, et on utilisera le modèle de la charge ponctuelle (les noyaux de thorium et d'hélium seront donc assimilés à leurs centres, que nous noterons respectivement O et M, portant les charges Q et q). On négligera le poids de la particule α.

1) La vitesse initiale de la particule étant nulle, déterminer son énergie mécanique initiale (en J puis en eV). On indique que l'énergie potentielle de la charge q soumise à l'attraction électrique de la charge Q vaut : $\mathscr{E}_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$, avec $r = OM$.

On donne : 1 eV $= 1{,}6.10^{-19}$ J

2) Calculer l'énergie mécanique et la vitesse de la particule quand elle est à grande distance *($r\to+\infty$)* du noyau. Comparer cette vitesse (que l'on donnera avec 3 chiffres significatifs) à celle de la lumière.

Application numérique : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $m(He) = 6{,}665.10^{-27}$ kg ; $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9.10^9$ USI. ; $c = 2{,}998.10^8$ m·s^{-1}.

3) Le calcul non-relativiste est-il très précis ? On donne la formule relativiste $\mathscr{E}_c = (\gamma-1)mc^2$ avec $\gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

Refaire le calcul de la vitesse.

M 46. Fusil à fléchettes

Un fusil à fléchettes comprend un ressort de raideur $k = 250$ N·m^{-1}, de longueur à vide $l_V = 12$ cm et qui, comprimé par la fléchette, ne mesure plus que $l = 4{,}0$ cm. On néglige les frottements. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

1) Sachant que la fléchette a une masse $m = 25$ g, calculer sa vitesse initiale de lancement, dans le cas d'un tir horizontal, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique (forme intégrale).

2) Quelle altitude maximale peut-elle atteindre dans le cas d'un tir vertical ? On pourra considérer, après l'avoir justifié, que le module de la vitesse initiale de lancement reste le même que pour un tir horizontal.

M 48. Brouillard, brume et purée de pois (reprise).

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids et à l'action de l'air. En négligeant la poussée d'Archimède, nous supposons que cette action de l'air se réduit à des frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, dont la puissance s'exprime par $\mathscr{P} = -\lambda v^2$. On abandonne une goutte d'eau sans vitesse initiale et en atmosphère calme. On admettra que le mouvement a lieu selon l'axe vertical Oz, que l'on orientera vers le bas.

1) Exprimer l'énergie mécanique de la goutte d'eau à un instant quelconque.

2) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique (forme instantanée) pour en déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la vitesse. On mettra cette équation différentielle sous la forme $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_L}{\tau}$, où τ désigne le temps caractéristique du mouvement, que l'on exprimera en fonction de λ et m. Que représente v_L ?

M 49. Luge glissant dans la soupe.

Un corps solide de masse $m = 100$ kg glisse, à la vitesse constante de 36 km·h^{-1}, sur un plan incliné de $\alpha = 30°$ par rapport au plan horizontal. On repère sa position dans un système d'axes Ox horizontal et Oy vertical ascendant.

1) Exprimer les composantes du vecteur vitesse en fonction du module v et de l'angle α.

2) Calculer la puissance des forces de frottements solides en utilisant le théorème de l'énergie mécanique (forme instantanée). On donne $g = 10$ m.s^{-2}.