M 45. Régime apériodique : influence des conditions initiales

On rappelle qu'un oscillateur unidimensionnel fortement amorti (régime apériodique) est régi par une équation horaire du type : $x(t) = x_{eq} + A_1 e^{-\delta_1 t} + A_2 e^{-\delta_2 t}$. On suppose δ_1 et δ_2 connus, avec $\delta_2 > \delta_1$. L'origine des x est telle que $x_{eq} = 0$.

1) On donne la position initiale $x(t=0) = x_0 > 0$ et la vitesse initiale $\dot{x}(t=0) = 0$

Exprimer A_1 et A_2 en fonction de δ_1, δ_2, et x_0.

En déduire l'expression de $x(t)$. Donner l'allure du graphe de $x(t)$.

2) Mêmes questions avec $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 < 0$.

M 46. Amortissement optimal.

Considérons un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = 10\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Le mouvement a lieu suivant Ox, l'origine O étant choisie sur la position d'équilibre du point. À $t = 0$, le point est en $x = x_0$, et il est lâché sans vitesse initiale. Nous voulons comparer les durées du retour à l'équilibre dans le cas des régimes apériodiques et critique.

1) On donne le facteur d'amortissement relatif $\xi = 2$. Le régime est donc apériodique.

   Calculer la date t_0 définie par $x(t_0) = \dfrac{x_0}{100}$ (méthode numérique).

2) Même question dans le cas du régime critique. Conclusion.

Rép : 1,75 s ; 0,66 s

M 47. Signification énergétique du facteur de qualité

Considérons un oscillateur harmonique amorti, de variable x : $x = x_{eq} + A e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega'_0 t + \psi)$

On rappelle que le facteur de qualité s'exprime par : $Q = \dfrac{1}{2\xi}$

1) Exprimer l'énergie mécanique à une date t.

2) Que peut-on dire du facteur d'amortissement et du facteur de qualité lorsque les frottements sont extrêmement faibles ? En déduire qu'alors $T'_0 \approx T_0$

3) Montrer que, dans ces conditions, la variation relative d'énergie mécanique au cours d'une pseudopériode vaut :

$$\frac{\Delta\mathscr{E}_m(t \to t + T'_0)}{\mathscr{E}_m(t)} = -\frac{2\pi}{Q}$$

Développement limité de la fonction exponentielle : on indique que lorsque $x \ll 1$: $e^x \approx 1 + x$

4) En déduire la signification de "facteur de *qualité*"

M 48. Mesure de la viscosité d'un fluide.

Une petite sphère de masse m et de rayon R, suspendue à un ressort de raideur k, est plongée dans un fluide. Ce dispositif expérimental doit nous permettre de déterminer la viscosité η du fluide.

On mesure la période T_0 des oscillations libres dans l'air puis la pseudopériode T'_0 des oscillations amorties dans le fluide. Sachant que pour une sphère de rayon R, la constante λ caractérisant la force de frottement fluide ($\vec{f} = -\lambda\vec{v}$) est reliée à la viscosité η par $\lambda = 6\pi\eta R$, exprimer η en fonction de T_0, T'_0 et des caractéristiques de la sphère.

Note : la sphère étant ici petite, on l'assimilera à un point et on supposera la poussée d'Archimède négligeable.

M 49. Mesure de masse en apesanteur

En apesanteur, par exemple dans la station spatiale internationale, les dispositifs usuels de mesure de masse ne sont plus fonctionnels à cause de l'absence de gravité. On peut toutefois mesurer la masse en utilisant une chaise fixée sur un ressort lui-même attaché à un point de la station. L'astronaute de masse m s'accroche à la chaise, on l'écarte de $x_0 = 30$ cm, et on le lâche sans vitesse initiale. On mesure alors la période d'oscillation T du système. Le ressort a une longueur à vide $l_0 = 1{,}0$ m et une raideur $k = 6{,}0.10^2\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$.

1) Faire un schéma, l'origine O de l'axe Ox sera prise à l'équilibre (lorsque $l = l_0$).

2) Établir l'équation différentielle sur $x(t)$ la position de l'astronaute au cours du temps.

3) La résoudre pour trouver $x(t)$.

4) On mesure $T = 2{,}33$ s pour un astronaute dont la masse avant le départ en orbite était $m' = 60$ kg. Trouver la masse m et commenter.

5) Sur Terre, avec le dispositif "à vide", c'est à dire horizontal et sans personne accroché dessus, on mesure $T' = 1{,}28$ s. En déduire la bonne valeur de la masse m.