M 80. Écoulement divergent, écoulement rotationnel

On rappelle le théorème d'Ostrogradski $\iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{X}\, d^3V = \oiint_S \vec{X}.\overrightarrow{d^2S}$

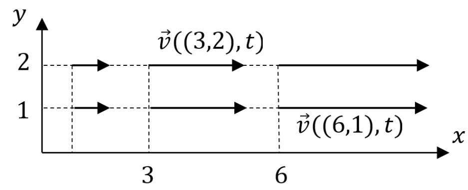
et le théorème de Stokes-Ampère $\iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{X}\right).\overrightarrow{d^2S} = \oint_C \vec{X}.\overrightarrow{dOM}$, $\vec{X}$ désignant un vecteur.

On rappelle également (mais ça, c'est à connaître ⚠) que $\operatorname{div} \vec{X} = \vec{\nabla}.\vec{X}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{X} = \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$

1) Rappeler la définition d'un écoulement divergent, sous forme intégrale.
   En déduire qu'un écoulement est divergent si $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$ (définition locale).
2) Rappeler la définition d'un écoulement rotationnel, sous forme intégrale.
   En déduire qu'un écoulement est rotationnel si $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} \neq \vec{0}$ (définition locale).

M 81. Caractérisation d'un écoulement

Soit un écoulement caractérisé par $\vec{v} = kx\, \overrightarrow{u_x}$, $k = cste$ (voir schéma)



1) Discuter du caractère divergent de cet écoulement en évaluant sans calcul le flux de la vitesse à travers une surface fermée cubique. Observer en particulier si le flux entrant par la gauche est égal à celui qui sort par la droite.

2) Vérifier que $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$. Conclure.

3) Discuter du caractère rotationnel de cet écoulement en évaluant sans calcul la circulation de la vitesse sur un chemin fermé rectangulaire. Observer en particulier le signe de $\vec{v}.\overrightarrow{dOM}$ de gauche à droite et de droite à gauche.

4) Vérifier que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$. Conclure.

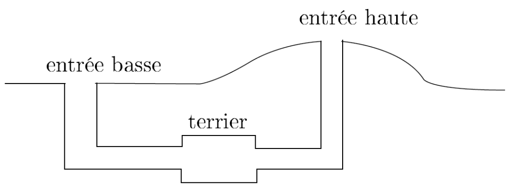
M 82. Filet d'eau issu d'un robinet *[Résolution de problème]*

Le jet d'eau provenant d'un robinet a un rayon moins important au fur et à mesure qu'il tombe.
Expliquer pourquoi.

M 83. Aération d'un terrier *[Résolution de problème]*

Dans les prairies Nord-Américaines, les chiens de prairie construisent deux types d'entrée pour leurs terriers (voir ci-contre).

Expliquer pourquoi ce système permet l'aération du terrier.

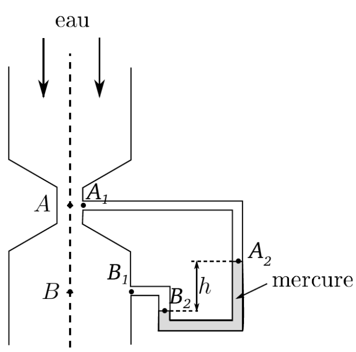


M 84. Collision de deux navires *[Résolution de problème]*

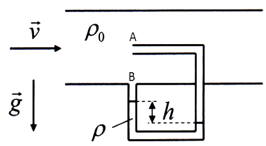
Deux navires animés d'un même mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse v suivent des routes parallèles en restant à même hauteur. Expliquer pourquoi il y a risque de collision.

M 85. Effet Venturi : mesure de débit

On considère le dispositif de la figure ci-contre.
L'écoulement est stationnaire, homogène et parfait, de débit massique D_m.
On remarquera qu'il y a discontinuité de la vitesse en A_1 et en B_1.
Exprimer D_m en fonction de R_A et R_B rayons de la conduite en A et en B, de la dénivellation h, de la masse volumique ρ_{Hg} du mercure et de la masse volumique ρ_{eau} de l'eau.



M 86. Tube de Pitot à prise frontale



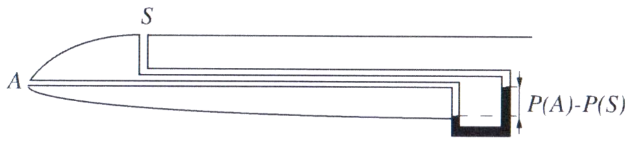
Une sonde cylindrique horizontale est parcourue par de l'air de masse volumique ρ_0 et de vitesse $\vec{v}$ parallèle à son axe. Une dérivation avec une prise frontale et une prise latérale contient du mercure de masse volumique ρ et qui se stabilise avec une dénivellation h. La prise frontale (A) est si petite que l'air y est stoppé à son entrée et la prise latérale (B) ne perturbe pas l'écoulement, de sorte que la vitesse de l'air y est identique à $\vec{v}$.

1) Calculer ρ_0 dans les CNTP.
2) Montrer par un calcul approché que la norme de la vitesse v s'exprime simplement en fonction de ρ, g, h et ρ_0.
3) AN : Que vaut v pour $h = 3$ cm ?

Données : $\rho = 13{,}6.10^3$ kg·m^{-3} ; $g = 9{,}81$ m·s^{-2} ; l'air sera assimilé à un gaz parfait, $R = 8{,}31$ J·K^{-1}·mol^{-1} ; la masse molaire moyenne de l'air est $M = 29$ g·mol^{-1}.

Rép : $v = \sqrt{\dfrac{2\rho g h}{\rho_0}} \approx 79$ m·s^{-1}

M 87. Autre tube de Pitot



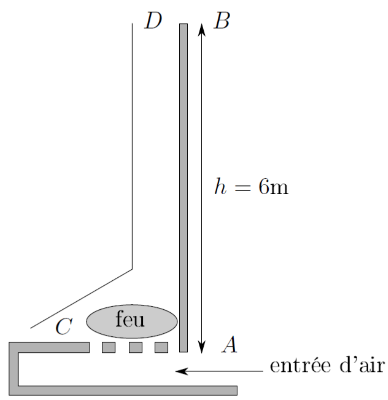
On place un tube de Pitot sur l'aile d'un avion pour déterminer sa vitesse. On se place dans le référentiel tel que le tube de Pitot soit immobile. Un manomètre donne la mesure de la différence de pression $\Delta p = p_{(A)} - p_{(S)}$. Le point A est un point d'arrêt et le point S est assez éloigné de A pour que l'écoulement n'y soit pas perturbé.

Soient p_0, ρ_0, et v_0 les caractéristiques du fluide loin du tube. On suppose l'écoulement stationnaire, homogène et parfait.

1) Expliquer la façon d'utiliser un tel manomètre. Comment mesure-t-on Δp ?
2) Exprimer v_0 en fonction de Δp et ρ_0.

Rép : $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho_0}}$

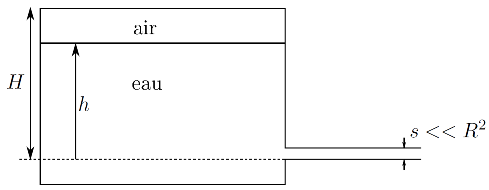
M 88. Étude d'une cheminée



On étudie l'écoulement de l'air dans une cheminée. La température à l'intérieur du conduit est supposée constante, $T_C = 150$ °C. La température extérieure est $T_E = 10$ °C, la pression extérieure de 1 bar. L'air est assimilé à un gaz parfait. On prendra soin de distinguer les masses volumiques de l'air intérieur et extérieur.

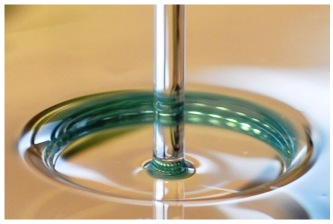
1) Calculer $p_A - p_B$ où A est un point au niveau de l'entrée d'air et B un point en haut de la cheminée, tous les deux à l'extérieur, en fonction de la masse volumique, de g et de h. Évaluer numériquement l'ordre de grandeur de cet écart de pression.
2) Exprimer puis calculer la vitesse v_D à la sortie D du conduit en supposant que la vitesse de l'air est nulle en C.
3) En réalité, la vitesse est plus faible. Pourquoi ?

M 89. Vidange d'un récipient par une paille



On perce une bouteille d'eau minérale d'un petit trou dans lequel on place une paille. La bouteille est assimilée à un cylindre de rayon R parfaitement diatherme. La paille est horizontale, sa section s est très petite devant celle de la bouteille. La pression extérieure p_0 est constante, la température extérieure T_0 aussi. La hauteur initiale d'eau est h_0. L'air de la bouteille est à chaque instant en équilibre thermique avec l'extérieur.

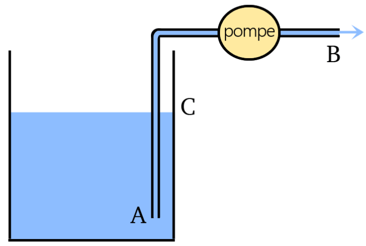
1) La pression de l'air contenu dans la bouteille est noté p_A. À $t = 0$, $p_A = p_0$. Exprimer p_A en cours de vidange en fonction de p_0, h, h_0 et H.
2) Calculer la vitesse d'éjection de l'eau en fonction de p_0, h, h_0, H, g et la masse volumique de l'eau.
3) Déterminer l'équation vérifiée par h_f, hauteur d'eau à la fin de la vidange, sous la forme d'un polynôme du second degré.



M 90. Caractère divergent/rotationnel d'un écoulement

Considérons l'écoulement d'un liquide photographié ci-contre.
Cet écoulement est-il rotationnel ?
Cet écoulement est-il divergent ?

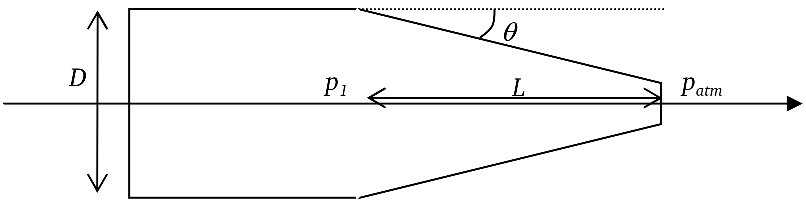
M 91. Pompe de jardin



On souhaite à l'aide d'une pompe vider une cuve remplie d'eau.
La surface du liquide est repérée par le point C.
En cours de vidange, le point C va donc descendre jusqu'en A.
Données :
$z_B - z_A = 3$ m ; débit volumique souhaité $D_V = 0,7\ \mathrm{L{\cdot}s^{-1}}$; section $S_B = 3\ \mathrm{cm}^2$.
On négligera la vitesse de l'écoulement dans la cuve. On prendra $g = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.
Quelle doit être la puissance de la pompe ?

M 92. Étude d'un convergent

On désire augmenter la vitesse d'un fluide en écoulement dans une conduite cylindrique . Pour cela on dispose d'un *convergent* d'une longueur L et dont l'inclinaison fait un angle θ avec l'horizontale. La situation est résumée dans le schéma ci-dessous :



On suppose dans tout l'exercice que les vitesses d'écoulement sont suffisamment faibles pour considérer l'écoulement stationnaire. On suppose d'autre part que le fluide en écoulement est incompressible.

1. Déterminer une relation entre D, L et θ pour que la vitesse d'écoulement soit multipliée par 2 à la sortie du convergent.
2. Déterminer la valeur numérique de L si $D = 20,0$ cm et $\theta = 10°$.
3. Sachant que la pression en sortie du convergent est égale à la pression atmosphérique p_{atm}, déterminer la différence de pression $p_1 - p_{atm}$ existant entre l'entrée et la sortie du convergent.
4. Faire l'application numérique de cette différence de pression si le débit volumique dans la conduite est égale à $D_V = 10\ \mathrm{L.s^{-1}}$.