LES DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE

1. MÉCANIQUE

1.1. Théorème de l'énergie mécanique

"Établir que le théorème de l'énergie mécanique découle du principe fondamental de la dynamique."

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p \Rightarrow \frac{d\mathscr{E}_m}{dt} = \frac{d\mathscr{E}_c}{dt} + \frac{d\mathscr{E}_p}{dt}$$

◊ *Variation d'énergie cinétique ?*

$$\frac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = m\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.\vec{v} = \left(\sum\vec{f}\right).\vec{v} = \sum\vec{f}.\vec{v}$$ d'après le PFD

⚠ *on remplace* v^2 *par* $\vec{v}^2$ *pour faire apparaître* $m\vec{a}$ *et introduire le PFD, et non* $m\|\vec{a}\|$*...*

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \sum\mathscr{P}\left(\vec{f}\right)} = \sum\mathscr{P}_C + \sum\mathscr{P}_{NC}$$ *(forme instantanée du théorème de l'énergie cinétique)*

◊ *Variation d'énergie potentielle ?*

$$d\mathscr{E}_p = \sum d\mathscr{E}_p\left(\vec{f}_C\right) = -\sum dW\left(\vec{f}_C\right) \Rightarrow \frac{d\mathscr{E}_p}{dt} = -\frac{\sum dW\left(\vec{f}_C\right)}{dt} = -\sum\mathscr{P}_C$$

◊ *Conclusion*

On obtient tout d'abord le théorème de l'énergie mécanique sous sa forme instantanée, aussi appelé théorème de la puissance mécanique : $\boxed{\dfrac{d\mathscr{E}_m}{dt} = \sum\mathscr{P}_{NC}}$ $\Rightarrow d\mathscr{E}_m = \sum\mathscr{P}_{NC}.dt = \sum dW_{NC}$

Puis, par intégration entre deux positions, le théorème de l'énergie mécanique sous sa forme intégrale :

$$\boxed{\Delta\mathscr{E}_m(A\to B) = \sum W_{NC}(A\to B)}$$

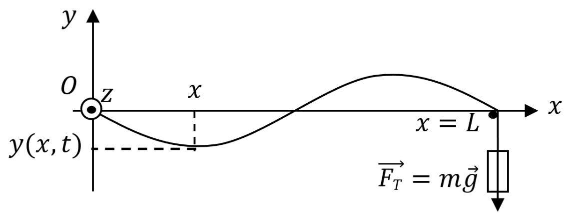
1.2. Équation d'onde des cordes vibrantes

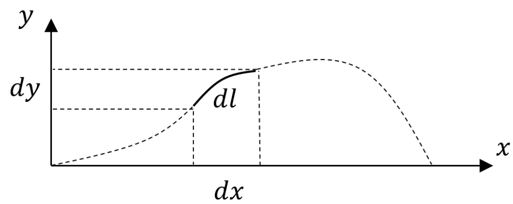
"Établir l'équation de propagation dans le cas des ondes transversales d'une corde."

a) modélisation d'une corde

◊ *description*

On étudie une corde de longueur L peu extensible ou très tendue (comme une corde de guitare), définie par sa masse linéique μ (en kg/m), et la tension F_T à laquelle elle est soumise, par exemple à l'aide d'une masse m comme sur le schéma. Au repos elle est confondue avec l'axe Ox :





Les mouvements transversaux de la corde sont décrits par l'altitude $y(x, t)$ de chacun de ses "éléments" dl.

◊ *hypothèses*

- forces négligées

Les frottements seront négligés, ainsi que le poids de la corde, car $m_{corde} \ll m \Rightarrow \left\|\vec{P}_{corde}\right\| \ll \left\|\vec{F_T}\right\|$.

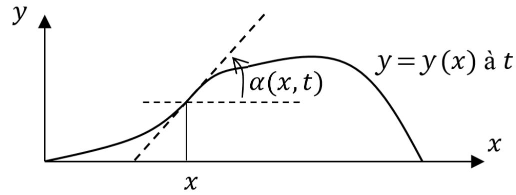
- approximation du mouvement rectiligne

La corde étant inextensible, ses déplacements selon x seront négligés. Pour simplifier l'étude en se ramenant à un problème à 1 dimension, les déplacements de la corde selon z seront également ignorés.
Chaque élément de corde est donc en mouvement rectiligne suivant y, de sorte que son accélération se réduit à : $\vec{a} = \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y}$

- mouvements de faible amplitude

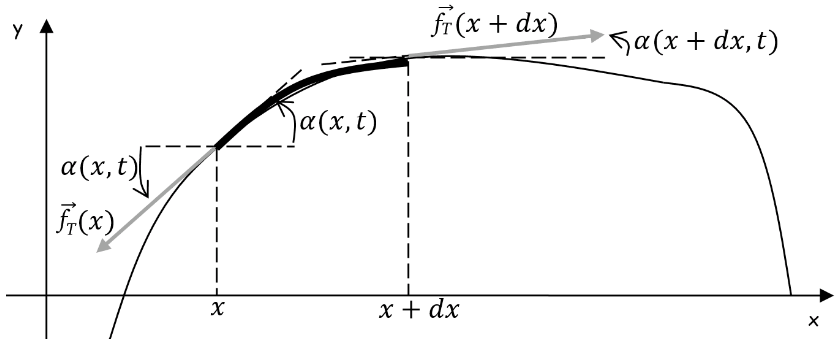
Les déplacements selon y sont considérés comme étant de faible amplitude, de sorte que l'angle $\alpha(x,\,t)$ que fait à la date t la tangente à la corde en x est très faible également (sur les schémas, on dilatera l'échelle en y pour que cet angle reste visible).
On pourra donc écrire, au premier ordre :

$$\cos\alpha \approx 1 \;;\; \sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$$



b) <u>établissement de l'équation de propagation</u>

Appliquons le PFD à un élément de corde situé entre x et $x+dx$, afin d'obtenir l'équation de son mouvement.
Sa masse vaut $dm = \mu\, dl \approx \mu\, dx$. En effet, l'angle α étant très faible, $dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \approx dx$ car $dy \ll dx$.
Les forces subies par cet élément de corde, d'après les hypothèses faites, se réduisent aux tensions exercées par le reste de la corde : celle-ci est en effet constituée d'éléments solidaires entre eux qui se "tirent" les uns les autres pour rester en contact. Ces tensions sont tangentielles à la corde au point où on les évalue et orientées de telle manière qu'elles tendent à maintenir "accroché" l'élément au reste de la corde. On note $f_T(x)$ la norme de la tension de la corde en x.



Le PFD appliqué à un élément de corde conduit à $\overrightarrow{f_T}(x+dx)+\overrightarrow{f_T}(x) = dm\,\vec{a}$

◊ *Projection sur Ox*

$$f_T(x+dx)\cos\alpha(x+dx) - f_T(x)\cos\alpha(x) = 0$$

$\cos\alpha \approx 1 \;\Rightarrow\; f_T(x+dx) \approx f_T(x)$ notée F_T

La norme de la tension est donc uniforme tout le long de la corde.

◊ *Projection sur Oy*

$$f_T(x+dx)\sin\alpha(x+dx) - f_T(x)\sin\alpha(x) = dm\,\ddot{y}$$

$\sin\alpha \approx \alpha \;\Rightarrow\; F_T\left[\alpha(x+dx)-\alpha(x)\right] = \mu dx\,\ddot{y}$

Or $\alpha(x+dx)-\alpha(x) = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}dx$

D'où $F_T\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}dx = \mu dx\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ soit $F_T\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} = \mu\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$? On a $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

On obtient $F_T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\mu}{F_T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

On pose alors $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{F_T}{\mu}}}$; cette constante du milieu de propagation est bien la <u>célérité</u>.

On a alors $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, que l'on retiendra finalement sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$ <u>équation de propagation</u> ou <u>équation d'onde</u> des cordes vibrantes.

Cette équation différentielle couplant l'espace et le temps, établie en 1747, appartient à la famille des équations de d'Alembert.

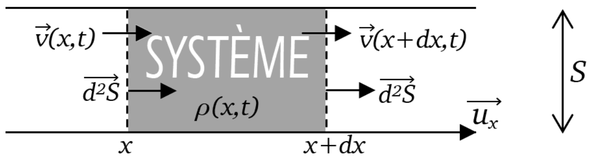
1.3. Dynamique des fluides : équation de conservation de la masse

"Établir un bilan local et global de matière en régime stationnaire."
Le régime variable est donc en marge du programme, mais le parallèle avec la conservation de la charge est essentiel.

a) <u>équation de conservation de la masse à une dimension</u>

La conservation de la masse est un principe physique. La masse ne peut donc être qu'échangée avec un autre système mais ni créée ni annihilée. On dit qu'il s'agit d'une grandeur conservative.

On raisonne sur une canalisation de section S constante, d'axe Ox, contenant un fluide non-visqueux de masse volumique ρ s'écoulant à la vitesse $\vec{v}$. Les champs des vitesses et des masses volumiques sont supposés uniformes au sein d'une section (écoulement parfait) : $\vec{v}(M,t) = v(x,t)\overrightarrow{u_x}$ dirigée dans le sens des x croissants, et $\rho(M,t) = \rho(x,t)$.



Dans le but l'effectuer un bilan local de matière, le système étudié sera une tranche élémentaire de cette canalisation, de largeur dx, et donc de volume Sdx (voir figure).

◊ *masse du système et sa variation*

Ce système contient donc à un instant t donné la masse $dm(x,t) = \rho(x,t)Sdx$

La masse volumique du fluide étant a priori variable (facile à imaginer pour un gaz), la masse du système varie.
Pendant une durée élémentaire dt, cette variation vaut :

$$dm(x,t+dt) - dm(x,t) = \rho(x,t+dt)Sdx - \rho(x,t)Sdx = \frac{\partial \rho}{\partial t}dt\ Sdx$$

◊ *masse échangée avec l'extérieur*

Les échanges de matière se passent à travers la surface d'entrée $S(x)$ et la surface de sortie $S(x+dx)$. Le système reçoit de la masse à travers la surface d'entrée et en cède à travers la surface de sortie.
Cela se traduit par une masse échangée avec l'extérieur : $dm_{échangée} = dm_{entrante} - dm_{sortante}$

Relions ces masses aux densités de courant de masse, en passant par l'intermédiaire du débit massique.
Il convient au préalable, pour exprimer les flux, d'orienter les surfaces : le sens de l'écoulement étant connu, le plus simple est d'orienter les surfaces selon ce sens. On a ainsi $\overrightarrow{d^2S}(x+dx) = \overrightarrow{d^2S}(x) = d^2S\overrightarrow{u_x}$, ce qui permet de définir des débits massiques entrant et sortant positifs.

$dm_{entrante}$?

En entrée, on a $D_m(x,t) = \dfrac{dm_{entrante}}{dt} = \Phi\left(\overrightarrow{j_m}(x,t),S\right) = \iint_{S(x)} \overrightarrow{j_m}.\overrightarrow{d^2S} = \overrightarrow{j_m}(x,t).\vec{S}(x) = j_m(x,t)S$

On en déduit donc que : $dm_{entrante} = j_m(x,t)Sdt$

$dm_{sortante}$?

En sortie, on a $D_m(x+dx,t) = \dfrac{dm_{sortante}}{dt} = \Phi\left(\overrightarrow{j_m}(x+dx,t),S\right) = \iint_{S(x+dx)} \overrightarrow{j_m}.\overrightarrow{d^2S} = \overrightarrow{j_m}(x+dx,t).\vec{S}(x+dx) = j_m(x+dx,t)S$

On en déduit donc que : $dm_{sortante} = j_m(x+dx,t)Sdt$

Bilan : $dm_{échangée} = dm_{entrante} - dm_{sortante} = j_m(x,t)Sdt - j_m(x+dx,t)Sdt = -\dfrac{\partial j_m}{\partial x}dx\ Sdt$

◊ *conservation de la masse*

Traduisons le fait que la variation de la masse du système correspond à la masse échangée avec l'extérieur :

$$dm(x,t+dt) - dm(x,t) = dm_{échangée} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}dt\ Sdx = -\frac{\partial j_m}{\partial x}dx\ Sdt$$

Soit $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_m}{\partial x} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\partial j_m}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

b) généralisation à trois dimensions

◊ *forme locale : équation de continuité*

Dans l'idée de généraliser à 3 dimensions, écrivons $\dfrac{\partial j_m}{\partial x} = \dfrac{\partial j_{mx}}{\partial x}$, puisque $\overrightarrow{j_m} = j_m \overrightarrow{u_x}$.

Si nous voulons tenir compte des 3 directions, nous allons donc remplacer $\dfrac{\partial j_m}{\partial x}$ par $\dfrac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \dfrac{\partial j_{my}}{\partial y} + \dfrac{\partial j_{mz}}{\partial z} = \vec{\nabla}.\overrightarrow{j_m} = \operatorname{div} \overrightarrow{j_m}$

En 3D, on passe donc de $\dfrac{\partial j_m}{\partial x}$ à $\operatorname{div} \overrightarrow{j_m}$

On obtient alors $\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{j_m} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

Cette forme d'équation est très générale en physique dès qu'il y a conservation de quelque chose. Nous la retrouvons en électrocinétique pour traduire la conservation de la charge.

◊ *forme intégrale*

En intégrant sur un volume $\mathscr{V}(S)$ limité par une surface S et en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_{\mathscr{V}(S)} \operatorname{div} \overrightarrow{j_m}\, d^3\mathscr{V} + \iiint_{\mathscr{V}(S)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\mathscr{V} = 0$$

$$\oiint_S \overrightarrow{j_m}.\overrightarrow{d^2S} + \frac{d}{dt} \iiint_{\mathscr{V}(S)} \rho\, d^3\mathscr{V} = 0$$

soit $\boxed{\Phi\left(\vec{j}_m, S_{fermée}\right) + \dfrac{d}{dt} m_{\text{int}}(S) = 0}$ *équation de conservation de la masse*

$m_{int}(S)$ est la masse en mouvement contenue dans la surface fermée.

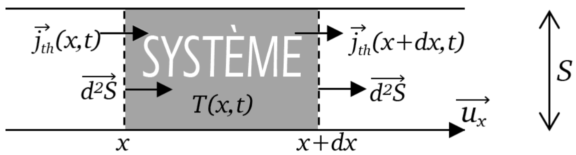
2. THERMODYNAMIQUE

Équation de la chaleur

"*Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel.*"

a) bilan d'énergie dans un conducteur thermique unidimensionnel

On raisonne sur le problème classique d'une barre homogène de section S, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des sources telles que $T_{gauche} > T_{droite}$



Dans le but l'effectuer un bilan énergétique local, le système thermodynamique étudié sera une tranche élémentaire de cette barre, de largeur dx (voir figure).

◊ *densité de courant thermique*

La température dans la barre ne dépendant que de x et de t, le vecteur densité de courant thermique qui traverse le système peut s'écrire :

$\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \overrightarrow{u_x} = j_{th} \overrightarrow{u_x}$. Il est orienté de la gauche vers la droite.

◊ *énergie interne du système et sa variation*

Le matériau étant solide, nous utilisons le modèle de la ϕci. On sait qu'alors les variations d'énergie internes sont de la forme $\Delta\mathscr{U} = C\Delta T$, d'où nous déduisons l'expression de l'énergie interne $\mathscr{U}(x,t) = CT(x,t)$.

Le système compris entre x et $x + dx$ a une masse $dm = \rho S dx \Rightarrow C = cdm = \rho S c dx \Rightarrow \mathscr{U}(x,t) = \rho Sc\, dx\, T(x,t)$

Nous nous intéresserons alors à la variation d'énergie interne de la tranche entre les instants t et $t+dt$:

$$\mathscr{U}(x,t+dt)-\mathscr{U}(x,t)=\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial t}dt=\rho Sc\,dx\frac{\partial T}{\partial t}dt$$

Remarque : afin de simplifier la compréhension, nous n'avons pas tenu compte dans les notations du fait que C est en réalité une grandeur élémentaire que nous aurions pu noter dC, relativement à une largeur dx. Nous aurions eu alors une variation de $d\mathscr{U}$.

◊ *travail échangé*

La barre étant supposée de volume constant, le travail des forces de pression est nul.

◊ *chaleur échangée*

Les transferts thermiques sont de nature conductive et se passent à travers la surface d'entrée $S(x)$ et la surface de sortie $S(x+dx)$. Le système reçoit de l'énergie à travers la surface d'entrée et en cède à travers la surface de sortie.

Cela se traduit par une énergie thermique échangée avec l'extérieur, : $dQ_{échangée}=dQ_{entrante}-dQ_{sortante}$

⚠ Dans ce calcul, les quantités élémentaires de chaleur $dQ_{entrante}$ et $dQ_{sortante}$ ne sont pas algébriques.

Relions ces énergies aux densités de courant thermiques, en passant par l'intermédiaire de la puissance thermique.

Il convient au préalable, pour exprimer les flux, d'orienter les surfaces : le sens du courant thermique étant connu, le plus simple est d'orienter les surfaces selon ce sens. On a ainsi $\overrightarrow{d^2S}(x+dx)=\overrightarrow{d^2S}(x)=d^2S\overrightarrow{u_x}$, ce qui permet de définir des puissances entrante et sortante positives.

$dQ_{entrante}$?

En entrée, on a $\mathscr{P}_{th}(x,t)=\dfrac{dQ_{entrante}}{dt}=\Phi\left(\overrightarrow{j_{th}},S\right)=\iint\limits_{S(x)}\overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{d^2S}=\iint\limits_{S(x)}j_{th}d^2S=j_{th}(x,t)S$

On en déduit donc que : $dQ_{entrante}=j_{th}(x,t)Sdt$

$dQ_{sortante}$?

En sortie, on a $\mathscr{P}_{th}(x+dx,t)=\dfrac{dQ_{sortante}}{dt}=\Phi\left(\overrightarrow{j_{th}},S\right)=\iint\limits_{S(x+dx)}\overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{d^2S}=\iint\limits_{S(x+dx)}j_{th}d^2S=j_{th}(x+dx,t)S$

On en déduit donc que : $dQ_{sortante}=j_{th}(x+dx,t)Sdt$

Bilan : $dQ_{échangée}=dQ_{entrante}-dQ_{sortante}=j_{th}(x,t)Sdt-j_{th}(x+dx,t)Sdt=-\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}dx\,Sdt$

◊ *application du premier principe*

$$\mathscr{U}(x,t+dt)-\mathscr{U}(x,t)=dQ_{échangée}\ \Rightarrow\ \rho Sc\,dx\frac{\partial T}{\partial t}dt=-\frac{\partial j_{th}}{\partial x}dx\,Sdt\ \Rightarrow\ \rho c\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

b) équation de la chaleur

◊ *énoncé*

D'après la loi de Fourier $\overrightarrow{j_{th}}=-\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T=-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}\overrightarrow{u_x}\ \Rightarrow\ j_{th}=-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}\ \Rightarrow-\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

On obtient donc $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t}=\lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ soit $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$ avec $D=\dfrac{\lambda}{\rho c}$: coefficient de diffusion thermique

(ou diffusivité thermique)

Cette équation est l'équation de la chaleur sans terme source dans le cas d'une conduction thermique unidirectionnelle.
Sans terme source ? sans apport d'énergie extérieur à la conduction (effet Joule…) qui participerait au bilan d'énergie.

c) généralisation 3D du bilan énergétique *(complément hors-programme)*

Revenons sur $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t}=-\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}+\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t}=0$

Dans l'idée de généraliser à 3 dimensions, écrivons $\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}=\dfrac{\partial j_{th,x}}{\partial x}$, puisque $\overrightarrow{j_{th}}=j_{th}\overrightarrow{u_x}$.

Si nous voulons tenir compte des 3 directions, nous allons donc remplacer $\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}$ par $\dfrac{\partial j_{th,x}}{\partial x}+\dfrac{\partial j_{th,y}}{\partial y}+\dfrac{\partial j_{th,z}}{\partial z}=\vec{\nabla}.\overrightarrow{j_{th}}=\text{div}\,\overrightarrow{j_{th}}$

En 3D, on passe donc de $\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}$ à $\text{div}\,\overrightarrow{j_{th}}$

On obtient alors $\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{j_{th}} + \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0}$

Remarque 1 : $\rho c T = \dfrac{m}{V} \times \dfrac{C}{m} \times T = \dfrac{\mathscr{U}}{V}$ *représente la densité volumique d'énergie interne.*

Remarque 2 : l'équation $\operatorname{div} \overrightarrow{j_{th}} + \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ *traduit la conservation de l'énergie thermique. C'est l'analogue de* $\operatorname{div} \vec{j}_m + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ *en dynamique des fluide ou* $\operatorname{div} \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ *(avec ρ = densité volumique de charge) en conduction électrique.*

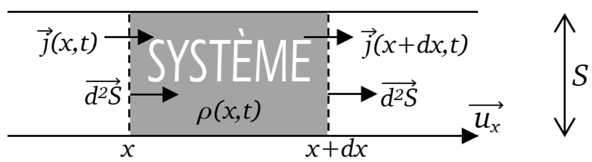
3. Électromagnétisme

3.1. Équation de conservation de la charge électrique

"Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension en régime variable.
Énoncer sa généralisation à trois dimensions."

a) <u>équation de conservation de la charge à une dimension</u>

La conservation de la charge est un principe physique. La charge ne peut donc être qu'échangée avec un autre système mais ni créée ni annihilée. On dit qu'il s'agit d'une grandeur conservative.



On raisonne sur un circuit de section S constante, d'axe Ox, contenant des charges mobiles de densité volumique ρ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, créant ainsi une densité de courant $\vec{j}$. Les vitesses et les densités de charges sont supposés uniformes au sein d'une section : $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(x,t)$, et $\rho(M,t) = \rho(x,t)$.

On a donc $\vec{j}(M,t) = j(x,t)\overrightarrow{u_x}$, supposé dirigé dans le sens des x croissants.

Dans le but l'effectuer un bilan local de charge, le système étudié sera une tranche élémentaire de ce circuit, de largeur dx, et donc de volume Sdx (voir figure).

◊ <u>*charge mobile du système et sa variation*</u>

Ce système contient donc à un instant t donné la charge mobile $dq(x,t) = \rho(x,t)Sdx$

Pendant une durée élémentaire dt, cette charge varie, du fait de l'évolution possible de sa densité volumique :

$$dq(x,t+dt) - dq(x,t) = \rho(x,t+dt)Sdx - \rho(x,t)Sdx = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\ Sdx$$

◊ <u>*charge échangée avec l'extérieur*</u>

Les échanges électriques se passent à travers la surface d'entrée $S(x)$ et la surface de sortie $S(x+dx)$. Le système voit sa charge augmenter à travers la surface d'entrée et diminuer à travers la surface de sortie.

Cela se traduit par une charge échangée avec l'extérieur, : $dq_{échangée} = dq_{entrante} - dq_{sortante}$

Relions ces charges aux densités de courant, en passant par l'intermédiaire de l'intensité algébrique.

Il convient au préalable, pour exprimer les flux, d'orienter les surfaces : le sens du courant étant connu, le plus simple est d'orienter les surfaces selon ce sens. On a ainsi $\overrightarrow{d^2S}(x+dx) = \overrightarrow{d^2S}(x) = d^2S\overrightarrow{u_x}$, ce qui permet de définir des intensités algébriques entrante et sortante positives.

$dq_{entrante}$?

En entrée, on a $I(x,t) = \dfrac{dq_{entrante}}{dt} = \Phi\left(\vec{j}(x),S\right) = \iint_{S(x)} \vec{j}.\overrightarrow{d^2S} = \iint_{S(x)} jd^2S = j(x,t)S$

On en déduit donc que : $dq_{entrante} = j(x,t)Sdt$

$dq_{sortante}$?

En sortie, on a $I(x+dx,t) = \dfrac{dq_{sortante}}{dt} = \Phi\left(\vec{j}(x+dx),S\right) = \iint_{S(x+dx)} \vec{j}.\overrightarrow{d^2S} = \iint_{S(x+dx)} jd^2S = j(x+dx,t)S$

On en déduit donc que : $\dfrac{dq_{sortante}}{dt} = j(x+dx,t)S \;\Rightarrow\; dq_{sortante} = j(x+dx,t)Sdt$

Bilan : $dq_{échangée} = dq_{entrante} - dq_{sortante} = j(x,t)Sdt - j(x+dx,t)Sdt = -\dfrac{\partial j}{\partial x}dx\,Sdt$

◊ *conservation de la charge*

Traduisons le fait que la variation de charge du système correspond à la charge échangée avec l'extérieur :

$$dq(x,t+dt) - dq(x,t) = dq_{échangée} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial \rho}{\partial t}dt\,Sdx = -\frac{\partial j}{\partial x}dx\,Sdt$$

Soit $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\dfrac{\partial j}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

b) généralisation à trois dimensions

◊ *forme locale : équation de continuité*

Dans l'idée de généraliser à 3 dimensions, écrivons $\dfrac{\partial j}{\partial x} = \dfrac{\partial j_x}{\partial x}$, puisque $\vec{j} = j\,\overrightarrow{u_x}$.

Si nous voulons tenir compte des 3 directions, nous allons donc remplacer $\dfrac{\partial j}{\partial x}$ par $\dfrac{\partial j_x}{\partial x} + \dfrac{\partial j_y}{\partial y} + \dfrac{\partial j_z}{\partial z} = \vec{\nabla}.\vec{j} = \mathrm{div}\,\vec{j}$

En 3D, on passe donc de $\dfrac{\partial j}{\partial x}$ à $\mathrm{div}\,\vec{j}$

On obtient alors $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

Cette forme d'équation est très générale en physique dès qu'il y a conservation de quelque chose. Nous la retrouvons en dynamique des fluides pour traduire la conservation de la masse.

◊ *forme intégrale*

En intégrant sur un volume $\mathscr{V}(S)$ limité par la surface S et en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_{\mathscr{V}(S)} \mathrm{div}\,\vec{j}\,d^3\mathscr{V} + \iiint_{\mathscr{V}(S)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d^3\mathscr{V} = 0$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{j}.\overrightarrow{d^2S} + \frac{d}{dt}\iiint_{\mathscr{V}(S)} \rho\,d^3\mathscr{V} = 0$$

soit $\boxed{\Phi\left(\vec{j},S_{fermée}\right) + \dfrac{d}{dt}q_{\mathrm{int}}(S) = 0}$ *équation de conservation de la charge*

$q_{int}(S)$ est la charge mobile contenue dans la surface fermée.

3.2. Ondes électromagnétiques : équations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

"Établir l'équation de propagation des champs dans le vide."

On a l'identité suivante : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div} - \vec{\Delta}$ $\quad$ $\vec{\Delta}$? C'est un opérateur nommé "laplacien vectoriel"

Appliqué à $\vec{E}$, cette identité donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{E} - \vec{\Delta}(\vec{E})$ avec

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \left| \begin{array}{l} \Delta E_x = \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \Delta E_y = \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \Delta E_z = \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

NB : Δ se nomme "laplacien scalaire" ou tout simplement "laplacien". Ainsi, le laplacien vectoriel de $\vec{E}$ a pour composantes le laplacien scalaire de chacune des composantes de $\vec{E}$.

Sachant que $\text{div}\,\vec{E} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}(\vec{E})$ soit $-\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\vec{\Delta}(\vec{E})$

Sachant que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on en déduit : $-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}(\vec{E})$ soit $-\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}(\vec{E})$

Par ailleurs, on sait que $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$, donc $\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$

Finalement

De même,

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\Delta}(\vec{E}) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \vec{\Delta}(\vec{B}) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}}$$