Objectifs : Faire des calculs approchés d'intégrales, en utilisant la méthodes des rectangles ou la méthode des trapèzes.

NB ***Compte-rendu :*** *Exercices **I1**, **I4**, **I5**, **I6**, **I7** et **I8** → scripts (fichier *.PY) ou autre à déposer sur Éclat :*
► *Espace des classes > Classe ATS > Dossiers partagés > TP info-physique >* ***séance N°3***

1. MÉTHODE DES RECTANGLES À GAUCHE

1.1. Présentation de la méthode des rectangles

Dans cette méthode, on calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de rectangles. Le domaine d'intégration est découpé en intervalles et on fait comme si la fonction restait constante sur chaque intervalle.

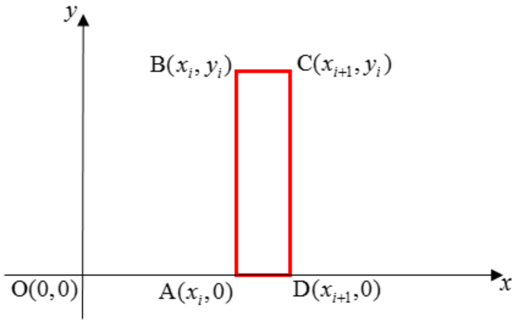
Sur chaque intervalle, on réalise ainsi l'approximation suivante : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx (x_{i+1}-x_i)f(\alpha)$

où α est une abscisse appartenant à l'intervalle limité par x_i et x_{i+1}.

Nous étudierons ici les cas où $\alpha = x_i$, $\alpha = x_{i+1}$, ou $\alpha = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ce qui signifie que pour chaque intervalle nous considérons comme constante la valeur prise par la fonction à l'extrémité gauche, à l'extrémité droite ou au milieu de l'intervalle. D'où les méthodes dites des rectangles à gauche, à droite ou des rectangles moyens.

Dans un premier temps (§1.2), nous allons réaliser un programme d'intégration pour $\alpha = a$ et nous visualiserons les rectangles, pour mieux comprendre la méthode.

<u>Note</u> : pour tracer un rectangle ABCD (voir figure ci-contre), il suffit de faire un `plot` avec les coordonnées de A, B, C, D et A. On n'oublie pas de terminer par A pour fermer le tracé.



exemple de code pour tracer un rectangle :

```
import matplotlib.pyplot as plt
x = [1, 1, 1.1, 1.1, 1] # abscisses des sommets
y = [0, 1, 1,   0,   0] # ordonnées des sommets
plt.plot(x, y,'r')
plt.xlim(0, 1.5)
plt.show()
```

Testez ce code, et apportez-lui des modifications, pour comprendre.

1.2. Principe de la méthode : programme avec visualisation

Appliquons cette méthode à l'intégration de la fonction cos entre 0 et $3\pi/2$, en prenant $\alpha = x_i$.

Nous visualiserons donc <u>sur chaque intervalle</u> l'approximation : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx (x_{i+1}-x_i)f(x_i)$

```
"""
intégration numérique par la méthode des rectangles à gauche : visualisation
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#paramètres de l'intégration
a = 0
b = 3*np.pi/2
n = 20

# définition et tracé de la fonction
def f(x):
    return np.cos(x)
x = np.linspace(a, b, n)
plt.plot(x,f(x),'r')

# intégration numérique
S = 0
```

```
for i in range(n-1):
    S = S + f(x[i])*(x[i+1]-x[i])
    # dessin du rectangle
    x_rect = [x[i], x[i],    x[i+1],  x[i+1], x[i]] # abscisses des sommets
    y_rect = [0   , f(x[i]), f(x[i]), 0     , 0   ] # ordonnees des sommets
    plt.plot(x_rect, y_rect,'g')
print('valeur de l''intégrale =', S)
plt.show()
```

1.3. Construction d'une fonction

Maintenant que nous avons vu le principe de cette méthode, appliquons-là de manière plus efficace, sans se soucier de la visualisation, pour y associer une fonction.

```
"""
intégration numérique par la méthode des rectangles à gauche : fonction
"""
import numpy as np

# intégration numérique
def rectanglesG(a,b,n,f):
    S=0
    for i in range(n-1):
        x1 = a+i*(b-a)/n
        x2 = a+(i+1)*(b-a)/n
        S = S + f(x1)*(x2-x1)
    return S

# application
def f(x) :
    return np.cos(x)
a = 0
b = 3*np.pi/2
n = 20
I = rectanglesG(a,b,n,f)
print('valeur de l''intégrale =', I)
```

1.4. Validité de cette méthode

Exercice I1 (à rendre)

Faire à la main le calcul de cette intégrale.
Comparer au résultat donné par le programme précédent.
Apporter des améliorations au programme.
Intégrer au programme une ligne permettant d'afficher l'erreur relative, en indiquant si possible la valeur de n dans le résultat (voir 'i1_fonctions_graphes.pdf' §3.1).

2. VARIANTES : MÉTHODE DES RECTANGLES À DROITE, MÉTHODE DES RECTANGLES MOYENS

2.1. Méthode des rectangles "à droite"

a) principe et visualisation

Exercice I2 (solution disponible)

Reprendre la démarche précédente avec $\alpha = x_{i+1}$.

b) fonction associée

Exercice I3 (solution disponible)

Construire la fonction associée, à partir du modèle du §1.3.

2.2. Méthode des rectangles moyens (ou "au milieu")

a) principe et visualisation

Exercice I4 (à rendre)

Reprendre la démarche précédente avec $\alpha = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

b) fonction associée

Exercice I5 (à rendre)

Construire la fonction associée, à partir du modèle du §1.3.

3. MÉTHODE DES TRAPÈZES

3.1. Présentation

Comme son nom l'indique, cette méthode d'intégration utilise une somme de surfaces de trapèzes.

Sur chaque intervalle, on réalise alors l'approximation suivante : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \dfrac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$

Justification de la formule :

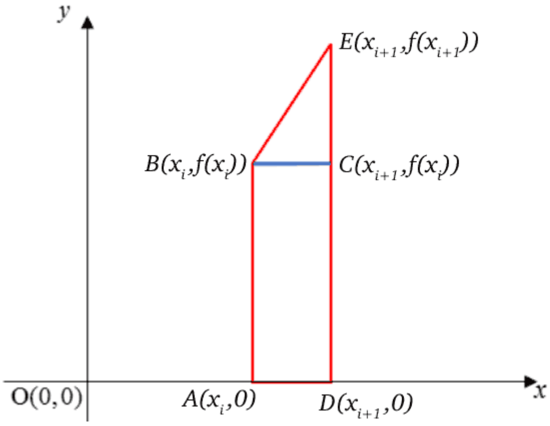
Pour calculer la surface du trapèze ABED, on fait la somme des aires du rectangle ABCD et du triangle rectangle BEC :

Surface de ABCD = $AD \times AB = (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$

Surface de BEC = $\dfrac{BC \times CE}{2} = \dfrac{(x_{i+1} - x_i)\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)}{2}$

Surface totale =

$\dfrac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\left(2f(x_i) + f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) = \dfrac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$



3.2. Mise en place

Exercice I6 (à rendre)

Faire un programme similaire au précédent avec cette fois la méthode des trapèzes en utilisant les mêmes valeurs numériques pour la fonction. Réaliser de même la visualisation des trapèzes.

Exercice I7 (à rendre)

Construire la fonction associée, à partir du modèle du §1.3.

4. APPLICATION

Exercice I8 (à rendre)

Montrer numériquement que la valeur moyenne sur une période de $\cos^2(x)$ est égale à ½. Choisir la méthode qui donne la meilleure précision.