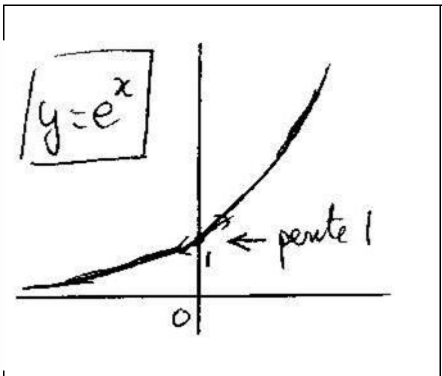
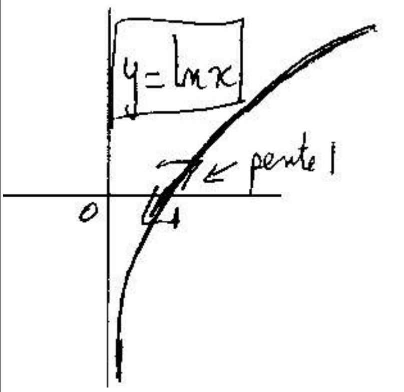
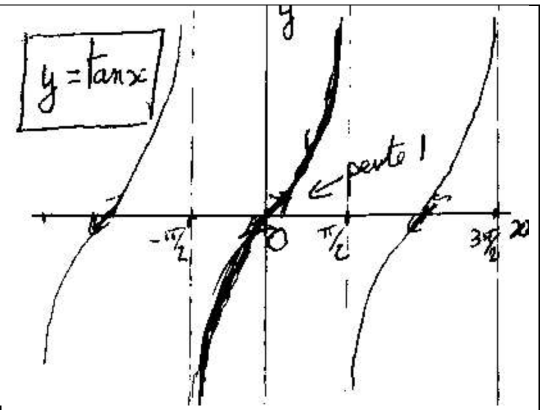
CE QU'IL FAUT SAVOIR.

- **Les fonctions classiques :**

		
Domaine : ℝ $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$	Domaine : $]0,+\infty[$ $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$	**Période π** $\lim\limits_{(\pi/2)^-} \tan x = +\infty$

- **Les puissances :**

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	en particulier : $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$;	$(a.b)^m = a^m.b^m$	; et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
$a^{m+n} = a^m.a^n$	et en particulier :	$e^{x+y} = e^x.e^y$ et $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$	
$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$	et en particulier :	$\left(e^a\right)^b = e^{a.b}$ et $\ln(a^b) = b.\ln(a)$	

- **Les DLs :** **Les Développements en série entière :**

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	(rayons ∞)
$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	
$\mathrm{ch}(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	
$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	
$\mathrm{sh}(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$	$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	
$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	(rayons 1)
$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}\ldots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$	$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$	
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$	
$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$		
$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$		
$f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+o(x^n)$ lorsque f est C^n au voisinage de 0.		

Il faut aussi savoir retrouver rapidement le DL de arctan(x); et savoir écrire la formule de Taylor ailleurs qu'en 0.

- **Les théorèmes de comparaison des croissances :**

$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ (α et β >0) $\qquad$ $x^\alpha(-\ln x)^\beta = 0$ (α et β >0)

$\frac{a^x}{x^\alpha}$ =+∞ (a>1 et α>0) $\qquad$ $\frac{n!}{a^n}$ =+∞ (a>0)

La somme des termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique :

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $1+x+x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ lorsque x≠1

$= n+1$ lorsque x=1

- **Les combinaisons, pour p ≤ n :**

$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $\qquad$ $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ $\qquad$ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$ $\qquad$ $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

- **Les formules de trigo :**

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\qquad$ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\qquad$ $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$e^{ix} = \cos(x)+i\sin(x)$ $\qquad$ $e^{inx} = (e^{ix})^n = \cos(nx)+i\sin(nx)$

$\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x2)}{1+\tan^2(x2)}$ $\qquad$ $\sin(x) = \frac{2\tan(x2)}{1+\tan^2(x2)}$

$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Il faut aussi savoir retrouver rapidement les formules permettant de linéariser $\cos^2(x)$; $\sin^2(x)$; cos(a)cos(b) ; sin(a)sin(b) ; sin(a)cos(b) ; ainsi que celles donnant cos(p)+cos(q) ; cos(p)-cos(q) ; et sin(p)+sin(q).

- **La méthode des invariants, pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle F(x) :**

Invariance par la transformation de x en –x :Changement de variable t=cos(x)
Invariance par la transformation de x en π+x :Changement de variable t=tan(x)
Invariance par la transformation de x en π–x :Changement de variable t=sin(x)

Lorsqu'il n'y a pas d'invariants, on fait le changement de variable t=tan(x/2).(Voir les formules de trigo.)

- **Le théorème des accroissements finis :**

Si f est continue sur [a,b], et dérivable sur]a,b[, alors il existe c ∈]a,b[tel que f(b)-f(a)=f '(c)(b-a).

Et bien sur, il faut savoir réécrire l'inégalité des accroissements finis.

- **Le théorème sur les suites récurrentes et celui sur les équa diff linéaires d'ordre 2 à coef constants :**

On s'intéresse aux suites vérifiant $U_{n+2}+aU_{n+1}+bU_n=0$; et aux équa diff de la forme $Y''+aY'+bY=0$.
Dans les deux cas, le polynôme caractéristique est X^2+aX+b

1 lorsque le polynôme caractéristique a deux racines distinctes λ et μ :

Les SUITES cherchées sont de la forme :	Les solutions de l'EQUA DIFF sont de la forme :
Dans C :	Dans C :
$U_n = A\lambda^n+B\mu^n$ où A et B sont complexes.	$Y = Ae^{\lambda x}+Be^{\mu x}$ où A et B sont complexes.
Dans R :	Dans R :
$U_n = A\lambda^n+B\mu^n$ où A et B sont réels.	$Y = Ae^{\lambda x}+Be^{\mu x}$ où A et B sont réels.

2 lorsque le polynôme caractéristique a une racine double λ :

Les SUITES cherchées sont de la forme :	Les solutions de l'EQUA DIFF sont de la forme :
Dans C :	Dans C :
$U_n = (An+B)\lambda^n$ où A et B sont complexes.	$Y = (Ax+B)e^{\lambda x}$ où A et B sont complexes.
Dans R :	Dans R :
$U_n = (An+B)\lambda^n$ où A et B sont réels.	$Y = (Ax+B)e^{\lambda x}$ où A et B sont réels.

3 lorsque le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées λ et μ :

Les SUITES cherchées sont de la forme :	Les solutions de l'EQUA DIFF sont de la forme :
Dans C :	Dans C :
$U_n = A\lambda^n+B\mu^n$ où A et B sont complexes.	$Y = Ae^{\lambda x}+Be^{\mu x}$ où A et B sont complexes.
Dans R ; lorsque $\lambda=re^{i\theta}$ et $\mu=re^{-i\theta}$:	Dans R ; lorsque $\lambda=\alpha+i\beta$ et $\mu=\alpha-i\beta$:
$Un = r^n(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))$ où A et B sont réels.	$Y = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x))$ où A et B sont réels.

- **Les dérivées des fonctions classiques :**

f est dérivable en t_0 signifie que : $\lim t \to t_0 \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$(ou encore $\lim h \to 0 \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$) existe et est finie.

FONCTIONS		**DERIVEES**
sin(x) et sin(U)		cos(x) et cos(U).U'
cos(x) et cos(U)		-sin(x) et -sin(U).U'
tan(x) et tan(U)		$1+\tan^2(x)$ (ou $\frac{1}{\cos^2(x)}$) et $[1+\tan^2(U)].U'$ (ou $\frac{1}{\cos^2(U)}.U'$)
sh(x) et sh(U)		ch(x) et ch(U).U'
ch(x) et ch(U)		sh(x) et sh(U).U'
x^n et U^n		nx^{n-1} et $nU^{n-1}.U'$
$\ln\lvert x\rvert$ et $\ln\lvert U\rvert$		$\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{U}.U'$
arcsin(x)	$(x\in]-1,1[)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos(x)	$(x\in]-1,1[)$	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$
arctan(x)		$\frac{1}{1+x^2}$
argsh(x)		$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
argch(x)	$(x > 1)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
fog(x) ou f[U]		f 'og(x)g'(x) ou f '[U].U'
$f^{\leftarrow}(x)$		$\frac{1}{f'(f^{\leftarrow}(x))}$
U.V		U'V+UV'
$\frac{U}{V}$		$\frac{U'.V-U.V'}{V^2}$

Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

La tangente en un point :

Pour une courbe $y = f(x)$: La pente en x_0 vaut $f'(x_0)$	
Pour une paramétrée $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ Le vecteur tangent en t_0 est : $\begin{pmatrix} f'(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix}$	
Pour une polaire $r = f(\theta)$ $\tan(V) = \dfrac{r}{r'}$, où V est l'angle entre l'axe des X et la tangente.	

- **Les recherches d'asymptotes**

Pour une courbe $y = f(x)$, lorsque x et y tendent vers l'infini, on calcule $\lim \frac{y}{x}=a$; puis $\lim y - ax=b$. On a alors une asymptote d'équation $y=ax+b$ Pour une paramétrée $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$, idem. Pour une polaire $r=f(\theta)$, lorsque θ tend vers θ_0 et r tend vers l'infini, on calcule $\lim_{\theta \to \theta_0} r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$. On a alors une asymptote d'équation Y=d.(Dans le nouveau repère.)

- **Les Riemann**

$\int \frac{1}{x^\alpha}dx$ CV lorsque $\alpha > 1$; et DIV lorsque $\alpha \leq 1$. Idem avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\int \frac{1}{x^\alpha}dx$ CV lorsque $\alpha < 1$; et DIV lorsque $\alpha \geq 1$. $\int \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ et $\int \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ CV lorsque $\alpha < 1$; et DIV lorsque $\alpha \geq 1$.

- **Les D'Alembert**

Séries de nombres :	Séries entières :
Si $\lim_{n \to \infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = \ell$, alors : Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CV Et si $\ell > 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIV	Si $\lim_{n \to \infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = \ell$, alors le rayon de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vaut $\frac{1}{\ell}$.

- **Les séries alternées :**

Le critère des séries alternées : Si 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1}a_n < 0$. 2 La suite de terme général $\lvert a_n \rvert$ est décroissante. 3 La suite de terme général $\lvert a_n \rvert$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$. alors, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CV. Ainsi, par exemple, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV lorsque $\alpha > 0$.

- **Fourier :**

COEFFICIENTS : Pour f continue par morceaux et 2π-périodique : T-périodique : $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\mathrm{dt}$ $a_0(f) = \frac{1}{T}\int f(t)\mathrm{dt}$ $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int f(t)\cos(\mathrm{nt})\mathrm{dt}$ pour n ≥ 1 $a_n(f) = \frac{2}{T}\int f(t)\cos(\mathrm{n\omega t})\mathrm{dt}$ $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int f(t)\sin(\mathrm{nt})\mathrm{dt}$ pour n ≥ 1. $b_n(f) = \frac{2}{T}\int f(t)\sin(\mathrm{n\omega t})\mathrm{dt}$
Lorsque f est paire : $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int f(t)\mathrm{dt}$; $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int f(t)\cos(\mathrm{nt})\mathrm{dt}$, pour n ≥ 1 ; et $b_n(f) = 0$, pour tout n. Lorsque f est impaire : $a_0(f) = 0$, pour tout n ; et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int f(t)\sin(\mathrm{nt})\mathrm{dt}$
SERIE DE FOURIER $S_f(x)=a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)$ Il faut aussi connaître le théorème de Dirichlet et la formule de Parseval avec les hypothèses.

- **L'extraction des racines nièmes :**

Les racines nièmes du complexe $re^{i\theta}$ sont les $z_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ où k varie de 0 à n-1.

- **La matrice d'une application linéaire dans une base :**

Si f est un endomorphisme de E, et si B = ($e_1,e_2,\dots,e_n$) est une base de E, alors la matrice A de f dans la base B s'obtient en mettant dans la première colonne les coordonnées de f(e_1) dans la base B, dans la deuxième colonne les coordonnées de f(e_2) dans la base B, et dans la nième colonne les coordonnées de f(e_n) dans la base B.

- **La matrice de passage d'une base à une autre :**

Si B = ($e_1,e_2,\dots,e_n$) et B' = ($e'_1,e'_2,\dots,e'_n$) sont deux bases de l'espace vectoriel E, alors la matrice de passage de B à B', $P_{B\to B'}$s'obtient en mettant dans la première colonne les coordonnées de e'_1 dans la base B, dans la deuxième colonne les coordonnées de e'_2 dans la base B, et dans la nième colonne les coordonnées de e'_n dans la base B.

- **Les formules de changement de base :**

Soit x ∊ E. On note X ses coordonnées dans la base B, et X' ses coordonnées dans la base B'. $X=P_{B\to B'}X'$ Soit f un endomorphisme de E. On note A sa matrice dans la base B et A' sa matrice dans la base B'. $A'=P_{B\to B'}^{-1}AP_{B\to B'}$

- **Images et noyaux d'une application linéaire de E dans F :**

{vec{v}}inℑ" \\($f$se traduit par « il existe $\vec{u} \in E$tel que $\vec{v}$=f($\vec{u}$) » {vec{u}}in italKer" \\($f$se traduit par « $f(\vec{u}) = \vec{0}$ »