Livret de calcul - Corrigé

ATS - Toulouse

Sommaire

Fractions

Exercice 1 Dans chaque cas, écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{8}{12} = \dfrac{4\times 2}{4\times 3} = \dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{6}$ c) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{6}-\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{6}$ d) $\dfrac{2}{5}+1 = \dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{5} = \dfrac{7}{5}$

e) $\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{20} = \dfrac{4}{60}+\dfrac{20}{60}-\dfrac{9}{60} = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 2 Dans chaque cas, écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{4}{3}\times\dfrac{7}{5} = \dfrac{28}{15}$ b) $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{9} = \dfrac{2}{9}$ c) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{12}+\dfrac{10}{12} = \dfrac{19}{12}$ d) $\dfrac{7}{8}-\dfrac{6}{5} = \dfrac{35}{40}-\dfrac{48}{40} = -\dfrac{13}{40}$

e) $\dfrac{-2}{5}\times\dfrac{3}{-7}\times\dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{5}$ f) $\dfrac{7}{11}\times\dfrac{3}{14} = \dfrac{3}{22}$ g) $\dfrac{6}{35}\times\dfrac{14}{3}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}$ h) $\dfrac{51}{26}\times\dfrac{49}{15}\times\dfrac{65}{119} = \dfrac{7}{2}$

Exercice 3 Dans chaque cas, écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{3}\div\dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{7}{5} = \dfrac{14}{15}$ b) $\dfrac{1}{3}\div 5 = \dfrac{1}{15}$ c) $-4\div\dfrac{-2}{13} = 4\times\dfrac{13}{2} = 26$ d) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$ e) $\dfrac{3}{\frac{7}{2}} = \dfrac{6}{7}$

Exercice 4 Dans chaque cas, écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2}{5} = \dfrac{10}{15}-\dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{15}$ b) $1+\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$ c) $\dfrac{1+\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{8}{7}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{7}$

d) $\dfrac{7}{3}\left(2-\dfrac{11}{4}\right) = \dfrac{7}{3}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{7}{4}$ e) $\dfrac{-3}{5}\times\dfrac{5}{\frac{-6}{13}} = \dfrac{13}{2}$ f) $\dfrac{5}{7}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{7}+\dfrac{9}{4} = \dfrac{20}{28}+\dfrac{63}{28} = \dfrac{83}{28}$

g) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \dfrac{7}{2\times 5}\times\dfrac{3\times 4}{1} = \dfrac{42}{5}$ g) $\dfrac{\frac{7}{-6}\times\frac{3}{-10}}{\frac{-14}{5}\times\frac{1}{-5}} = \dfrac{7}{20}\times\dfrac{25}{14} = \dfrac{5}{8}$

Exercice 5

$$\begin{aligned}
\dfrac{0,5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}} + \dfrac{0,5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0,2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3,5} &= \dfrac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}} + \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}} \\
&= \dfrac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)} + \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{7\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)} \\
&= \dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{7} = \dfrac{16}{35}
\end{aligned}$$

Exercice 6

a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n} = \dfrac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \dfrac{n+(n+1)(n-n-1)}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2}$

b) Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \dfrac{6(n+1)}{2n(n-1)(n-1)}\times\dfrac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)} = \dfrac{3n}{2}$

Puissances

Exercice 1 Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3 = 10^8$ b) $(10^5)^3 = 10^{15}$ c) $\dfrac{10^5}{10^3} = 10^2$

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-2}$ e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}} = \dfrac{10^{10}}{10^6} = 10^4$ f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{10^{-10}}{10^{-2}} = 10^{-8}$

Exercice 2 Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $0,001 = 10^{-3}$ b) $10^3 \cdot 0,01^3 = 10^3 \cdot (10^{-2})^3 = 10^{-3}$ c) $\dfrac{0,01^2}{0,1^5} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10^1$

d) $0,001^{-2} \cdot 1000^2 = 10^6 \cdot 10^6 = 10^{12}$ e) $\dfrac{1000 \cdot 0,01^3}{0,1^3 \cdot 0,01^2} = \dfrac{10^3 \cdot 10^{-6}}{10^{-3} \cdot 10^{-4}} = 10^4$ f) $\dfrac{(0,01^3)^{-2}}{0,1^{-3} \cdot (100^{-2})^{-3}} = 10^{-3}$

Exercice 3 Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4$ b) $(5^3)^{-2} = 5^{-6}$ c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}} = 2^7$

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5} = 7^{-2}$ e) $\dfrac{6^5}{2^5} = 3^5$ f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}} = \dfrac{30^{28}}{10^{28}} = 3^{28}$

Exercice 4 Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}$ b) $2^{21} + 2^{22} = 2^{21}(1+2) = 2^{21} \cdot 3^1$

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \dfrac{3^{21}(3+1)}{3^{21}(3-1)} = \dfrac{3^{21} \cdot 2^2}{3^{21} \cdot 2} = 2^1 \cdot 3^0$ d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{\left(3^2 \cdot 2^4\right)^8}{(-3)^{-10} \cdot 2^{-6}} = \dfrac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}$

Exercice 5 Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \dfrac{(2^3)^{17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{(3^2)^{-3} \cdot 2^{42}} = 2^3$

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \dfrac{5^2 \cdot 11^2 \cdot 11^{-4} \cdot (5^3)^2}{11 \cdot 5^2 \cdot (11^2 \times 5)^{-2} \cdot 5^8} = \dfrac{5^8 \cdot 11^{-2}}{11^{-3} \cdot 5^8} = 11$

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \dfrac{4^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{5^4 \cdot 9^{-4} \cdot 2^{-4}} = \dfrac{2^{-4} \cdot 3^2}{3^{-8} \cdot 2^{-4}} = 3^{10}$

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \dfrac{6^6 \cdot 7^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 7^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = 2^6 \cdot 5$

Développer et factoriser

Dans les exercices suivants, x représente un nombre réel ou complexe.

Exercice 1 Développer, réduire et ordonner.

a) $5(6x-2)+2(3-7x) = 30x-10+6-14x = 16x-4$

b) $5(1-5x)-(8x-3) = 5-25x-8x+3 = -33x+8$

c) $(-x+4)(x+8) = -x^2-8x+4x+32 = -x^2-4x+32$

d) $(8x-3)(8-7x)+2(8x-3) = 64x-56x^2-24+21x+16x-6 = -56x^2+101x-30$

e) $3(4x-7)(7x+5) = 3(28x^2+20x-49x-35) = 3(28x^2-29x-35) = 84x^2-87x-105$

f) $5(1+2x)-(11+2x)(3x-1) = 5+10x-(33x-11+6x^2-2x) = 5+10x-31x+11-6x^2$

$$= -6x^2-21x+16$$

g) $\left(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{4}{21}x+\dfrac{3}{16}x-\dfrac{1}{14} = \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{336}x-\dfrac{1}{14}$

h) $(x^2-3x)(5x^3-7) = 5x^5-15x^4-7x^2+21x$

Exercice 2 Factoriser.

a) $(8x-3)(7x-5)+(8x-3)(x+9) = (8x-3)[(7x-5)+(x+9)] = (8x-3)(8x+4) = 4(8x-3)(2x+1)$

b) $(1-4x)(x+7)+(1-4x)(2x-1) = (1-4x)[(x+7)+(2x-1)] = (1-4x)(3x+6) = 3(1-4x)(x+2)$

c) $(3x+2)(x-2)+7(3x+2) = (3x+2)[(x-2)+7] = (3x+2)(x+5)$

d) $(11+2x)(3x+1)+(11+2x) = (11+2x)[(3x+1)+1] = (11+2x)(3x+2)$

e) $(13x-5)(x-1)-(x-1)(x+3) = (x-1)[(13x-5)-(x+3)] = (x-1)(13x-5-x-3) = (x-1)(12x-8) = 4(x-1)(3x-2)$

f) $(8x-5)(x+1)+3(x+1)-(7x-1)(x+1) = (x+1)[(8x-5)+3-(7x-1)] = (x+1)(8x-5+3-7x+1) = (x+1)(x-1)$

g) $(x+4)(3x-1)+(2x+8)(x+7) = (x+4)(3x-1)+2(x+4)(x+7) = (x+4)[(3x-1)+2(x+7)] = (x+4)(3x-1+2x+14) = (x+4)(5x+13)$

h) $(5x-9)^2-(5x+10)(5x-9) = (5x-9)[(5x-9)-(5x+10)] = (5x-9)(5x-9-5x-10) = -19(5x-9)$

i) $(5x-3)(7-x)-(x-7)(4x-3) = (5x-3)(7-x)+(7-x)(4x-3) = (7-x)[(5x-3)+(4x-3)] = (7-x)(9x-6) = 3(7-x)(3x-2)$

j) $(6x-5)(2x+11)+(x+9)(5-6x) = (6x-5)(2x+11)-(x+9)(6x-5) = (6x-5)[(2x+11)-(x+9)] = (6x-5)(2x+11-x-9) = (6x-5)(x+2)$

Exercice 3 Développer :

a) $3(x+1)-(x+3)(2x+2) = 3x+3-(2x^2+2x+6x+6) = 3x+3-2x^2-8x-6 = -2x^2-5x-3$

b) $(3x-2)(x+1)-(6x-4)(x+3) = 3x^2+3x-2x-2-(6x^2+18x-4x-12)$
$= 3x^2+x-2-6x^2-14x+12 = -3x^2-13x+10$

c) $(4x+7)^2+4x+7 = (4x+7)(4x+7)+4x+7 = 16x^2+28x+28x+49+4x+7 = 16x^2+60x+56$

d) $(2x-3)^2+(x+6)(3-2x)+4x-6 = 4x^2-12x+9+3x-2x^2+18-12x+4x-6 = 2x^2-17x+21$

Factoriser :

a) $3(x+1)-(x+3)(2x+2) = (x+1)(3-2x-6) = (x+1)(-2x-3)$

b) $(3x-2)(x+1)-(6x-4)(x+3) = (3x-2)(x+1-2x-6) = (3x-2)(-x-5)$

c) $(4x+7)^2+4x+7 = (4x+7)(4x+7+1) = (4x+7)(4x+8) = 4(4x+7)(x+2)$

d) $(2x-3)^2+(x+6)(3-2x)+4x-6 = (2x-3)(2x-3-x-6+2) = (2x-3)(x-7)$

Identités remarquables

Dans les exercices suivants, x représente un nombre réel ou complexe.

Exercice 1 Développer.

a) $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ b) $(x-4)^2 = x^2-8x+16$ c) $(x-5)(x+5) = x^2-25$
d) $(3x-5)^2 = 9x^2-30x+25$ e) $(2x-3)^2 = 4x^2-12x+9$ f) $(11-x)(11+x) = 121-x^2$
g) $(7x+2)^2 = 49x^2+28x+4$ h) $(4x-7)^2 = 16x^2-56x+49$ i) $(4x-3)(4x+3) = 16x^2-9$

Exercice 2 Factoriser.

a) $x^2+10x+25 = (x+5)^2$ b) $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ c) $x^2-49 = (x-7)(x+7)$
d) $4x^2-20x+25 = (2x-5)^2$ e) $36x^2+36x+9 = (6x+3)^2$ f) $9x^2-16 = (3x-4)(3x+4)$

Exercice 3 Développer, réduire et ordonner.

a) $(x+2)^2+(3-2x)(3+2x) = x^2+4x+4+9-4x^2 = -3x^2+4x+13$
b) $(2x+1)^2-(x-3)^2 = 4x^2+4x+1-x^2+6x-9 = 3x^2+10x-8$
c) $(x+1)(x-1)-(5x+2)^2 = x^2-1-25x^2-20x-4 = -24x^2-20x-5$
d) $(7-x)^2-(9x-1)^2 = 49-14x+x^2-81x^2+18x-1 = -80x^2+4x+48$

Exercice 4 Factoriser.

a) $(x+2)^2-9 = (x+2-3)(x+2+3) = (x-1)(x+5)$
b) $(2x+1)^2-(x-3)^2 = [(2x+1)-(x-3)][(2x+1)+(x-3)] = (x+4)(4x-2) = 2(x+4)(2x-1)$
c) $(x+2)(x+1)+x^2-1 = (x+1)(x+2+x-1) = (x+1)(2x+1)$
d) $25-x^2-(x-5)(2x+3) = (5-x)(5+x)+(5-x)(2x+3) = (5-x)(5+x+2x+3) = (5-x)(3x+8)$

Exercice 5 Simplifier au maximum (avec x un nombre non nul et différent de 1, -1, 2, et -2.

a) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)-2}{(x-1)(x+1)}$
$= \dfrac{x^2-x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x+1}$

b) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)+x(x-1)-2x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{x^2-4}{x(x^2-4)}+\dfrac{x^2+2x}{x(x^2-4)}+\dfrac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2-4+x^2+2x+2(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Exercice 6 Écrire sous forme canonique.

a) $x^2+8x+3 = (x+4)^2-13$
b) $x^2-10x+9 = (x-5)^2-16$
c) $x^2+2x+7 = (x+1)^2+6$
d) $5x^2+30x+46 = 5(x^2+6x)+46 = 5[(x+3)^2-9]+46 = 5(x+3)^2+1$
e) $2x^2-12x+8 = 2(x^2-6x)+8 = 2(x-3)^2-10$
f) $3x^2+15x-7 = 3(x^2+5x)-7 = 3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{103}{4}$

Racines carrées

Exercice 1
Écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a un nombre réel et b un nombre entier le plus petit possible.

a) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ c) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ d) $\sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

e) $\sqrt{275} = 5\sqrt{11}$ f) $\sqrt{\dfrac{18}{25}} = \dfrac{3}{5}\sqrt{2}$ g) $\sqrt{\dfrac{198}{891}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2}$ h) $\sqrt{\dfrac{495}{44}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

Exercice 2 Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers naturels, b le plus petit possible.

a) $2\sqrt{20} + \sqrt{5} - \sqrt{45} = 4\sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{40} - \sqrt{160} + 2\sqrt{250} = 2\sqrt{10} - 4\sqrt{10} + 10\sqrt{10} = 8\sqrt{10}$

c) $\sqrt{507} - 4\sqrt{75} + 3\sqrt{27} = 13\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Exercice 3 Simplifier les produits suivants.

a) $\sqrt{14} \times \sqrt{56} = \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{8} = 7 \times 4 = 28$

b) $\sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5} = \sqrt{2^4 \times 3^6 \times 5} = 108\sqrt{5}$ c) $\sqrt{8} \times \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{8}{3}$

d) $\sqrt{80} \times \sqrt{180} = 10 \times 4 \times 3 = 120$ e) $\sqrt{8} \times \sqrt{225} \times \sqrt{72} = 8 \times 9 \times 5 = 360$

f) $\sqrt{45} \times \sqrt{\dfrac{22}{20}} \times \sqrt{\dfrac{28}{11}} = 3\sqrt{14}$ g) $\sqrt{2^3} \times \sqrt{2^7} = 2^5$

h) $\sqrt{7,5} \times \sqrt{2,7} \times \sqrt{0,04} = \sqrt{\frac{75\times27\times4}{10\times10\times100}} = \frac{5\times9\times2}{100} = 0,9$

i) $\dfrac{\sqrt{5^5} \times \sqrt{2^3} \times \sqrt{7^3}}{\sqrt{50} \times \sqrt{28}} = \sqrt{\frac{5^2\times5^3\times2^3\times7^3}{25\times2\times7\times2^2}} = 7 \times 5\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

Exercice 4 Effectuer les produits suivants puis réduire.

a) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ b) $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = -1$

c) $(3\sqrt{6} - \sqrt{150})(5\sqrt{24} - 2\sqrt{54}) = (3\sqrt{6} - 5\sqrt{6})(10\sqrt{6} - 6\sqrt{6}) = -2\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} = -8 \times 6 = -48$

d) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 12 + 4\sqrt{15} + 5 = 17 + 4\sqrt{15}$ e) $\sqrt{1 + \frac{3}{5}}\sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

f) $(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}})^2 = 7 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + 7 + 2\sqrt{6} = 14 + 2\sqrt{49 - 4 \times 6} = 24$

Exercice 5 Écrire sans racine au dénominateur (en utilisant la quantité conjuguée).

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2} + 1} = \dfrac{5(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 5\sqrt{2} - 5$ b) $\dfrac{11}{3 - \sqrt{2}} = \dfrac{11(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \dfrac{33 + 11\sqrt{2}}{7}$

c) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \dfrac{(1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \dfrac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{4} = 2 + \sqrt{5}$

d) $\dfrac{7 + \sqrt{2}}{5 + \sqrt{3}} = \dfrac{(7 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{3})}{25 - 3} = \dfrac{35 - 7\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{6}}{22}$

Exercice 6 Égalités à justifier.

a) $\sqrt{8} + \sqrt{50} = 2\sqrt{+}5\sqrt{2} = 7\sqrt{2} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{98}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{8} + \sqrt{3}}{8 - 3} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5}$

Équations

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes.

a) $3x + 2 = 0$ — $\mathscr{S} = \{-\frac{2}{3}\}$

b) $14 - 3x = -1$ — $\mathscr{S} = \{5\}$

c) $2x - 3 = -x + 6$ — $\mathscr{S} = \{3\}$

d) $5x + 7 = 5 - 2x$ — $\mathscr{S} = \{-\frac{2}{7}\}$

Exercice 2 Résoudre les équations produit suivantes.

a) $(2x + 3)(2x + 1) = 0 \iff 2x + 3 = 0$ ou $2x + 1 = 0$
$\mathscr{S} = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}$

b) $(-x - 3)(5x + 2) = 0$
$\mathscr{S} = \{-3, -\frac{2}{5}\}$

c) $2x(6x - 3) = 0$
$\mathscr{S} = \{0, \frac{1}{2}\}$

d) $(5x + 1)(7 - 3x)(x + 2) = 0$
$\mathscr{S} = \{-2, -\frac{1}{5}, \frac{7}{3}\}$

e) $5(2x - 4)(x + 2) = 0$
$\mathscr{S} = \{2, -2\}$

f) $-3x(1 - 4x)(7x + 4) = 0$
$\mathscr{S} = \{-\frac{4}{7}, 0, \dfrac{1}{4}\}$

Exercice 3 Se ramener à une équation produit pour résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 - 25 = 0 \iff (x - 5)(x + 5) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{-5, 5\}$

b) $4x^2 = 1 \iff (2x - 1)(2x + 1) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

c) $x^2 - 3 = 0 \iff (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

d) $3x^2 - 2x = 7x \iff 3x(x - 3) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{0, 3\}$

e) $7 - x^2 = 2 \iff (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

f) $(x - 3)^2 = 7 \iff (x - 3 - \sqrt{7})(x - 3 + \sqrt{7}) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}\}$

g) $(2x - 3)(4 + 7x) + (2x - 3)(x + 4) = 0 \iff (2x - 3)(8x + 8) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{-1, \frac{3}{2}\}$

h) $(3x - 5)^2 = (2x - 3)(3x - 5) \iff (3x - 5)(x - 2) = 0$ .... $\mathscr{S} = \{\frac{5}{3}, 2\}$

i) $(2x - 1)^2 - (7x + 3)^2 = 0 \iff (2x - 1 - 7x - 3)(2x - 1 + 7x + 3) = 0$ ... $\mathscr{S} = \{-\frac{4}{5}, -\frac{2}{9}\}$

j) $(5x + 3)^2 = 4(2x + 5)^2 \iff (5x + 3 - 2(2x + 5))(5x + 3 + 2(2x + 5)) = 0$ $\mathscr{S} = \{-\frac{13}{9}, 7\}$

Exercice 4 Résoudre les équations quotient suivantes.

a) $\dfrac{2x + 8}{5 - 2x} = 0$ (avec $x \neq \frac{5}{2}$)
$\mathscr{S} = \{-4\}$

b) $\dfrac{10x - 15}{12 - 8x} = 0$ (avec $x \neq \frac{3}{2}$)
$\mathscr{S} = \varnothing$

c) $\dfrac{3x + 1}{2 + 6x} = 0$ (avec $x \neq -\frac{1}{3}$)
$\mathscr{S} = \varnothing$

d) $\dfrac{(-6x + 5)(3x - 1)}{7 + x} = 0$
$\mathscr{S} = \{\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\}$ (avec $x \neq 7$)

e) $\dfrac{(-x + 5)(3x + 6)}{(x + 1)(2x + 3)} = 0$
$\mathscr{S} = \{-2, 5\}$ (avec $x \neq -1$ et $-\frac{3}{2}$)

f) $\dfrac{(11 + 11x)(3 + x)}{x^2 - 1} = 0$
$\mathscr{S} = \{-3\}$ (avec $x \neq -1$ et $x \neq 1$)

Exercice 5 Se ramener à une équation quotient pour résoudre les équations suivantes.

a) Avec $x \neq -\frac{1}{3}$
$$\frac{2}{3x + 1} = 5 \iff \frac{2 - 5(3x + 1)}{3x + 1} = 0$$
$\mathscr{S} = \{-\frac{1}{5}\}$

b) Avec $x \neq \frac{6}{5}$
$$\frac{3x + 1}{6 - 5x} = 2 \iff \frac{3x + 1 - 2(6 - 5x)}{6 - 5x} = 0$$
$\mathscr{S} = \{\frac{11}{13}\}$

c) Avec $x \neq -3$
$$\frac{2x^2 + 1}{3 + x} = 2x \iff \frac{2x^2 + 1 - 2x(3 + x)}{3 + x} = 0$$
$\mathscr{S} = \{\frac{1}{6}\}$

d) Avec $x \neq 1$ et $x \neq \frac{1}{2}$
$$\frac{3}{x - 1} = \frac{4}{1 - 2x} \iff \frac{3(1 - 2x) - 4(x - 1)}{(x - 1)(1 - 2x)} = 0$$
$\mathscr{S} = \{\frac{7}{10}\}$

e) Avec $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq 2$

$$\frac{1}{1-2x} + 4 = \frac{-4x}{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-x+4(1-2x)(2-x)+4x(1-2x)}{(1-2x)(2-x)} = 0$$

$\mathscr{S} = \{\frac{10}{17}\}$

f) Avec $x \neq -1$ et $x \neq 1$

$$\frac{4}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{5}{x^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4(x-1)+2(x+1)-5}{(x+1)(x-1)} = 0$$

$\mathscr{S} = \{\frac{7}{6}\}$

Exercice 6 Exprimer simplement l'inconnue en fonction des autres grandeurs (avec $m \neq 0$).

a) $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ avec pour inconnue k.

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_2 + k_2}, \quad \text{avec } k_1 \neq 0 \text{ et } k_2 \neq 0$$

b) $\dfrac{2mg}{a}\rho - \dfrac{mC^2}{\rho^3} = 0$ avec pour inconnue ρ et $\rho > 0$.

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{C^2 a}{2g}}, \quad \text{avec } \frac{C^2 a}{2g} \geqslant 0$$

c) $\dfrac{R}{L} - \dfrac{I}{RC} = 0$ avec pour inconnue R.

$$R = \sqrt{\frac{IL}{C}} \text{ ou } R = -\sqrt{\frac{IL}{C}}$$

avec $\dfrac{IL}{C} \geqslant 0$

d) $\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{mgd^2}{2R} = \dfrac{mgR}{2}$ avec pour inconnue v.

$$v = \sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} \text{ ou } v = -\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$$

avec $R - \dfrac{d^2}{R} \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$

Inégalités et inéquations

Exercice 1 On considère un nombre réel x tel que $-2 < x \leqslant 1$. Encadrer les expressions suivantes.

a) $-1 < x+1 \leqslant 2$ b) $-6 < x-4 \leqslant -3$ c) $-6 < 3x \leqslant 3$ d) $-2 \leqslant -2x < 4$

e) $-\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{x}{2} < 1$ f) $-11 < 2x-7 \leqslant -5$ g) $6 \leqslant 11-5x < 21$

Exercice 2 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $5x-3 > 7x-95 \;\Leftrightarrow\; 92 > 2x$
$\mathscr{S} =]-\infty;46[$

b) $3x \geqslant 24 - \dfrac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; 7x \geqslant 48$
$\mathscr{S} = [\frac{48}{7}, +\infty[$

c) $\dfrac{3x-2}{4} < \dfrac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; 3x-2 < 2x$
$\mathscr{S} =]-\infty, 2[$

Exercice 3 Résoudre les inéquations produit suivantes (aide en vidéo : ici).

a) $(3x+2)(5x-4) > 0$
$\mathscr{S} =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{5}, +\infty[$

b) $(-2x+7)(5x-4) \leqslant 0$
$\mathscr{S} =]-\infty, \frac{4}{5}] \cup [\frac{7}{2}, +\infty[$

c) $(-5x-2)(-13x+7) < 0$
$\mathscr{S} =]-\frac{2}{5}, \frac{7}{13}[$

d) $(-x+8)(5-2x) \geqslant 0$
$\mathscr{S} =]-\infty, \frac{5}{2}] \cup [8, +\infty[$

e) $(-x+5)(3x-1)(-7x-3) \leqslant 0$
$\mathscr{S} =]-\infty, -\frac{3}{7}] \cup [\frac{1}{3}, 5]$

f) $x(x^2-1) > 0$
$\mathscr{S} =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

Exercice 4 Résoudre les inéquations quotient suivantes (aide en vidéo : ici).

a) $\dfrac{-5x-2}{-13x+8} < 0$
$\mathscr{S} =]-\frac{2}{5}, \frac{8}{13}[$

b) $\dfrac{7-3x}{x+8} \geqslant 0$
$\mathscr{S} =]-8, \frac{7}{3}]$

c) $\dfrac{-x+8}{5-2x} \geqslant 0$
$\mathscr{S} =]-\infty, \frac{5}{2}[\cup[8, +\infty[$

d) $\dfrac{(-x+5)(3x-1)}{(3+2x)(-7x-3)} \geqslant 0$
$\mathscr{S} =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{7}, \frac{1}{3}] \cup [5, +\infty[$

Exercice 5 Résoudre les inéquations suivantes (si besoin se ramener à une inéquation produit ou quotient).

a) $(1-4x)(x+7) - 3(1-4x) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (1-4x)[(x+7)-3] \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} =]-\infty, -4] \cup [\frac{1}{4}, +\infty[$

b) Avec $x \neq -1$ et $x \neq 1$, $\dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x-1} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x+1)} > 0$ ..... $\mathscr{S} =]-1, 1[\cup[5, +\infty[$

c) Avec $x \neq -\frac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3x+1} \leqslant 5 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2-5(3x+1)}{3x+1} \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} =]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup[-\frac{1}{5}, +\infty[$

d) $(5x-9)^2 < (5x+10)(5x-9) \;\Leftrightarrow\; (5x-9)[(5x-9)-(5x+10)] < 0$ .. $\mathscr{S} =]\frac{9}{5}, +\infty[$

e) Avec $x \neq \frac{6}{5}$, $\dfrac{3x+1}{6-5x} \leqslant -2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3x+1+2(6-5x)}{6-5x} \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} =]\frac{6}{5}, \frac{13}{5}]$

f) Avec $x \neq -3$, $\dfrac{2x^2+1}{3+x} < 2x \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2x^2+1-2x(3+x)}{3+x} < 0$ .... $\mathscr{S} =]-\infty, -3[\cup]\frac{1}{6}, +\infty[$

g) $x^2-2x+1 \geqslant 2x-3 \;\Leftrightarrow\; x^2-4x+4 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 \geqslant 0$ .... $\mathscr{S} = \mathbb{R}$

h) Avec $x \neq -1$ et $x \neq 2$,
$\dfrac{x-3}{x+1} + \dfrac{2x+5}{x-2} > 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-3)(x-2)+(2x+5)(x+1)-3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} > 0$ .... $\mathscr{S} =]-\frac{17}{5}, -1[\cup]2, +\infty[$

i) Avec $x \neq -1$ et $x \neq 1$, $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} > \dfrac{5}{x^2-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{3(x-1)+2(x+1)-5}{(x+1)(x-1)} > 0$ $\mathscr{S} =]-1, 1[\cup]\frac{6}{5}, +\infty[$

j) $x^4-1 \leqslant x^2-1 \;\Leftrightarrow\; (x^2-1)x^2 \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} = [-1, 1]$

k) Avec $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{3}$, $\dfrac{x}{3x-1} \geqslant \dfrac{3x-1}{x} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2-(3x-1)^2}{x(3x-1)} \geqslant 0$ .... $\mathscr{S} =]0, \frac{1}{4}]\cup]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

l) Avec $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{-x^2}{x^2+1} \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} = \mathbb{R}$

Dérivation

Exercice 1 - avec des sommes

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3 + 2x$ b) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 15x^4 + 1$ c) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$

d) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ e) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{x^2}{2}$ f) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{14}{x^8}$

Exercice 2 - avec des produits

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x^2 + 2x - 11$ b) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

c) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$ d) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

Exercice 3 - avec des quotients

a) $x \in]2; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{13}{(2-x)^2}$ b) $x \in]1; +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 2x + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$ d) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-3x + 2}{2\sqrt{x}(3x+2)}$

Exercice 4

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{6x - 5}{(3x^2 - 5x + 4)^2}$ b) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 10x - \dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$

c) $x \in]0; +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{7x + 4}{2x\sqrt{x}}$ d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

Exercice 5

Déterminer l'expression d'une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ et telle que $f'(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^2}$.

$f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{x}$ convient.

Trigonométrie

Exercice 1 Valeurs exactes.

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ c) $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sin(7\pi) = 0$ f) $\cos(13\pi) = -1$

Exercice 2 Simplifier.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 0$

c) $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1$ d) $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

Exercice 3 Sans calcul, donner le signe des nombres suivants.

a) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ b) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{5}\right) < 0$ c) $\cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) > 0$ d) $\sin\left(\dfrac{14\pi}{5}\right) > 0$

Exercice 4 Résoudre

a) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$

Dans $[0; 2\pi]$, $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Dans $[-\pi; \pi]$, $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$

b) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Dans $[0; 2\pi]$, $\mathscr{S} = \{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Dans $[-\pi; \pi]$, $\mathscr{S} = \{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\}$

Exponentielle

Exercice 1 Simplifier et écrire chaque résultat sous la forme e^a avec a un nombre réel.

a) $\mathrm{e}^{-7} \times \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^{-4}$ b) $\dfrac{\mathrm{e}^{14}}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{12}$ c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{11}} = \mathrm{e}^{-11}$

d) $\dfrac{\mathrm{e}^{1,7} \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{10}} = \mathrm{e}^{-11,3}$ e) $\mathrm{e}^2 \times (\mathrm{e}^3)^{-4} = \mathrm{e}^{-10}$ f) $\left(\dfrac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-5,1}}{\mathrm{e}^7}\right)^2 = \mathrm{e}^{-22,2}$

Exercice 2 Simplifier chaque expression et écrire le résultat sous la forme $\mathrm{e}^{A(x)}$ avec x un nombre réel.

a) $\mathrm{e}^{1+x} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x+1}$ b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-7+0,2x}} = \mathrm{e}^{7-0,2x}$ c) $\dfrac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{3x-1}}{\mathrm{e}^{x+1}} = \mathrm{e}^{2x-1}$ d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e}^{x-3}} = \mathrm{e}^{-2x+4}$

e) $\mathrm{e}^{2-x} \times \mathrm{e}^{3-x} = \mathrm{e}^{5-2x}$ f) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x-5}}{\mathrm{e}^{x+5}} = \mathrm{e}^{x-10}$ g) $\dfrac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x-1}} = \mathrm{e}^{x+2}$ h) $\dfrac{\mathrm{e}^{2-x} \times (\mathrm{e}^{2x+1})^3}{\mathrm{e}^{-x-1} \times \mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{4x+6}$

Exercice 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes (aide en vidéos : équations - inéquations)

a) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3$ .... $\mathscr{S} = \{3\}$

b) $\mathrm{e}^{3x+1} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0$ .... $\mathscr{S} = \{-\frac{1}{3}\}$

c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0$ .... $\mathscr{S} = \{0\}$

d) $\dfrac{3}{\mathrm{e}^{2x} + 2} = \mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow 3 = \mathrm{e}^0 + 2\,\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{-2x}$ ... $\mathscr{S} = \{0\}$

e) $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{e}^x = -1}_{\textit{impossible}}$ ou $\mathrm{e}^x = 1$ .... $\mathscr{S} = \{0\}$

f) $\mathrm{e}^{-x+1} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x+1} > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow -x + 1 > 0$ .... $\mathscr{S} =]-\infty, 1[$

g) $7\,\mathrm{e}^{-x} < -7 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < -1$ .... $\mathscr{S} = \varnothing$

h) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} = \varnothing$

i) $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -2x \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} = [0, +\infty[$

j) $\mathrm{e}^x > \mathrm{e} \Leftrightarrow x > 1$ .... $\mathscr{S} =]1, +\infty[$

k) $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x \leqslant -x \Leftrightarrow 2x \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} =]-\infty, 0]$

l) $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^x \Leftrightarrow -x^2 \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant x(x+1)$ .... $\mathscr{S} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

m) $\underbrace{(\mathrm{e}^x + 1)}_{>0}(\mathrm{e}^{-3x} - 1) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3x} - 1 > 0 \Leftrightarrow -3x > 0$ $\mathscr{S} =]-\infty, 0[$

n) $(\mathrm{e}^x)^2 \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \geqslant \mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow 2x \geqslant -1$ .... $\mathscr{S} = [-\frac{1}{2}, +\infty[$

o) $(2x - 3)\underbrace{\mathrm{e}^x}_{>0} \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 3 \leqslant 0$ .... $\mathscr{S} =]-\infty, \frac{3}{2}]$

Exercice 4 Montrer les égalités suivantes pour tout nombre réel x.

a) $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 4) = \mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^x + 4$ par double distributivité

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}{\mathrm{e}^{(x-1)^2}} = \mathrm{e}^{(x+1)^2 - (x-1)^2} = \mathrm{e}^{4x}$

c) $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2 = (\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}) - (\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}) = 4$

Exercice 5

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = (4-x)\,\mathrm{e}^x$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$

c) $x \in]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1(\mathrm{e}^x-1)-(x-2)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \dfrac{3\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$

d) $x \in [2;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-3)-\mathrm{e}^x \times 2x}{(x^2-3)^2} = \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x - 3\,\mathrm{e}^x}{(x^2-3)^2}$

e) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}$

f) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}$

g) $x \in]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

h) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{x^2-x+3}$

i) $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x}+1)-\mathrm{e}^x \times 2\,\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \dfrac{-\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(-e^{2x}+1)}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}$

Logarithme népérien

Exercice 1 Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

a) $\ln 16 = 4\ln 2$ b) $\ln 512 = 9\ln 2$ c) $\ln(0,125) = -3\ln 2$

d) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}\ln 2$ e) $\ln 72 - 2\ln 3 = 3\ln 2$ f) $\ln 36 = 2\ln 3 + 2\ln 2$

Exercice 2 Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\dfrac{1}{12} = -2\ln 2 - \ln 3$ b) $\ln 500 = 3\ln 5 + 2\ln 2$ c) $\ln(2,25) = 2\ln 3 - 2\ln 2$

d) $\ln\dfrac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$ e) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0,875) = \ln 3 + 11\ln 2$ avec $0,875 = \frac{7}{8}$ f) $\ln(6,25) = 2\ln 5 - \ln 4$

Exercice 3 Calculer le nombre suivant en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100} = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}\right) = \ln\frac{1}{100} = -2\ln 4 - 2\ln 5$$

Exercice 4 Ecrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 8$ b) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}$ c) $\mathrm{e}^{-2\ln 3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 3}} = \dfrac{1}{9}$

d) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}$ e) $\mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 2} = \mathrm{e}^{\ln\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ f) $-\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}}} = -2$

g) $\mathrm{e}^{-\ln(\ln(2))} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(\ln(2))}} = \dfrac{1}{\ln 2}$ h) $\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}} = \ln(\mathrm{e}^{-17}) = -17$ i) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) = \dfrac{1}{2}\big(\ln(\mathrm{e}^4) - \ln(\mathrm{e}^2)\big) = 1$

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes (aide en vidéos : équations - inéquations)

a) Avec $x > 0$, $\ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$ .... $\mathscr{S} = \{\mathrm{e}^{-1}\}$

b) Avec $x < \frac{2}{5}$, $\ln(2-5x) = 0 \iff \ln(2-5x) = \ln 1 \iff 2 - 5x = 1$ .... $\mathscr{S} = \{\frac{1}{5}\}$

c) Avec $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 9 \iff x^2 = \mathrm{e}^9$ .... $\mathscr{S} = \{-\mathrm{e}^{4,5}, \mathrm{e}^{4,5}\}$

d) Avec $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+3} = 7 \iff x + 3 = \ln 7$ .... $\mathscr{S} = \{\ln 7 - 3\}$

e) Avec $x > \frac{5}{3}$, $\ln(3x-5) \leqslant 12 \iff 3x - 5 \leqslant \mathrm{e}^{12}$ .... $\mathscr{S} =]\frac{5}{3}, \frac{\mathrm{e}^{12}+5}{3}]$

f) Avec $x > 2$, $\ln(x+2) < \ln(x^2-4) \iff x + 2 < x^2 - 4$

$\iff x + 2 < (x-2)(x+2)$

$\iff 0 < \underbrace{(x+2)}_{>0}(x-2-1)$ .... $\mathscr{S} =]3, +\infty[$

g) Avec $-\frac{3}{2} < x < 1$, $\ln(3+2x) > \ln(1-x) \iff 3 + 2x > 1 - x \iff 3x > -2$ $\mathscr{S} =]-\frac{2}{3}, 1[$

h) Avec $x > 0$, $\mathrm{e}^{1+\ln x} \leqslant 2 \iff 1 + \ln x \leqslant \ln 2$ .... $\mathscr{S} =]0, \mathrm{e}^{\ln 2 - 1}]$

Exercice 6

a) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2}{x} - 1$ b) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = 2x\ln x + x$

c) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \ln x$ d) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

e) $x \in]2; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x(2\ln x - 1)^2}$ f) $x \in]1; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

g) $x \in]0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$ h) $x \in]\frac{2}{3}; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-3}{-3x+2}$

Vecteurs du plan

Pour les exercices suivants, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 1 Calculer les coordonnées des vecteurs suivants avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

a) $2\vec{u}\binom{-4}{2}$ b) $-\vec{u}\binom{2}{-1}$ c) $-5\vec{u}\binom{10}{-5}$ d) $\dfrac{1}{2}\vec{u}\binom{-1}{0{,}5}$

e) $\vec{u}+\vec{v}\binom{3}{0}$ f) $\vec{u}-\vec{v}\binom{-7}{2}$ g) $3\vec{u}+4\vec{v}\binom{14}{-1}$ h) $-5\vec{u}+2\vec{v}\binom{20}{-7}$

Exercice 2 Calculer la norme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$ b) $\|\vec{v}\|=1$ c) $\|\vec{w}\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{6}$

Exercice 3 Dans chaque cas, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (exemple ici), puis la longueur AB.

a) $A(-1\ ;\ 9)$ et $B(3\ ;\ 6)$

$\overrightarrow{AB}\binom{4}{-3}$

$AB=\sqrt{16+9}=5$

b) $A(0\ ;\ -3)$ et $B(2\ ;\ -7)$

$\overrightarrow{AB}\binom{2}{-4}$

$AB=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

c) $A\left(1,25\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$ et $B(1\ ;\ 1)$

$\overrightarrow{AB}\binom{-0{,}25}{\frac{1}{3}}$

$AB=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{9+16}{16\times 9}}=\dfrac{5}{4\times 3}=\dfrac{5}{12}$

Exercice 4 On considère les points $A(-1\ ;\ 3)$; $B(2\ ;\ -1)$; $C(5{,}5\ ;\ 1)$ et $D(4\ ;\ 3)$.
On note M le milieu du segment $[AB]$ et E le milieu du segment $[MD]$.

a) Coordonnées des points M et E

$M\left(\frac{1}{2},1\right)$ et $E(2,25;2)$

b) Montrons que les segments $[MD]$ et $[AC]$ ont le même milieu

E est le milieu de $[MD]$.
Or Les coordonnées du milieu de $[AC]$ sont $(2,25;2)$
D'où E est aussi le milieu de $[AC]$.
Ainsi dans la quadrilatère $AMCD$ les diagonales se coupent en leur milieu.
Donc $\boxed{AMCD \text{ est un parallélogramme}}$.

Exercice 5 On considère les points $A(-1\ ;\ 2)$; $B(1\ ;\ -4)$ et $C(3\ ;\ 2)$.
Pour chaque égalité vectorielle, déterminer les coordonnées du point D.

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$D(5,-4)$

b) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$D(-1,-10)$

c) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$

$D(-\frac{7}{3},-6)$