

Note au candidat

L'épreuve est constituée de deux problèmes totalement indépendants. Ces problèmes seront traités sur des copies séparées. On veillera à bien indiquer et respecter la numérotation des questions.

*Attention, dans les deux problèmes les **grandeurs vectorielles** sont notées en caractères **gras** !*

PREMIER PROBLEME
ETUDE D'UN SATELLITE ARTIFICIEL

Les parties I et II sont indépendantes des parties III et IV.

I - Propriétés générales de la trajectoire

Un satellite artificiel, assimilable à point matériel de masse m , évolue librement à grande distance de la Terre. La Terre est considéré comme un corps immobile, rigoureusement sphérique et homogène, de rayon R , de masse M et de centre O .

On désigne par $\mathbf{r}(t) = Om$, le vecteur position du satellite et par $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ son vecteur vitesse. A l'instant initial $t = 0$, le satellite se trouve dans la position \mathbf{r}_0 , animé de la vitesse \mathbf{v}_0 , non radiale.

L'influence de la Lune, du Soleil, des autres planètes, ainsi que celle de l'atmosphère sont ignorées. On étudie la situation pour $t > 0$.

A1.1. Donner l'expression vectorielle du champ de force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ auquel est soumis le satellite.

– On désignera par G la constante de gravitation universelle –.

S'agit-il d'un champ de force central ?

A1.2. Définir le vecteur moment cinétique \mathbf{J} du satellite, par rapport au centre O .

A1.3. Montrer que, quel que soit $t \geq 0$, le moment cinétique \mathbf{J} du satellite est constant, égal à une valeur \mathbf{J}_0 . Expliciter \mathbf{J}_0 .

A1.4. Justifier le fait que la trajectoire suivie par le satellite, pour $t \geq 0$, est entièrement contenue dans un plan fixe P , que l'on précisera.

II - Trajectoire. Aspects dynamiques et énergie

On se place dorénavant dans le plan P de la trajectoire, rapporté aux coordonnées polaires (r, θ) , de centre O et de base locale $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta\}$.

– \mathbf{u}_r et \mathbf{u}_θ sont respectivement le vecteur unitaire radial (selon \mathbf{r}) et le vecteur unitaire orthoradial (perpendiculaire à \mathbf{r}) –.

A2.1. Montrer que le principe fondamental de la dynamique, appliqué au satellite, sur l'une des directions, radiale ou orthoradiale, conduit à l'équation différentielle :

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

Que représente le terme $2r\dot{\theta}$?

A2.2. Dédire de l'équation différentielle précédente que le mouvement du satellite vérifie une relation de la forme : $r^n \dot{\theta} = K = \text{cste}$.

Déterminer l'exposant n , et relier la constante K au moment cinétique J_0 et à la masse m .

A2.3. Exprimer l'aire dA balayée par le rayon-vecteur \mathbf{r} durant l'intervalle de temps dt .

Montrer que l'aire A balayée par le rayon-vecteur durant un intervalle de temps $t = t_2 - t_1 > 0$ est proportionnelle à t , le facteur de proportionnalité α étant le même quel que soit t_1 et t_2 (*seconde loi de Kepler*). Pour cela, on identifiera le facteur α .

On note respectivement $U(\mathbf{r})$ et $T(\mathbf{r})$ l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du satellite dans la position courante \mathbf{r} , et respectivement U_0 et T_0 ces mêmes énergies à l'instant initial.

A2.4. Partant de la position \mathbf{r} , le satellite effectue un déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$ le long de sa trajectoire.

Relier les variations $dU(\mathbf{r})$ et $dT(\mathbf{r})$ de l'énergie potentielle et cinétique observées au cours de ce déplacement, au champ de force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

De quelle propriété jouit la somme $E(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + T(\mathbf{r})$?

A2.5. Exprimer la condition sur U_0 et T_0 pour que le satellite reste en orbite autour de la Terre (état lié).

Quelle est alors la nature de la trajectoire suivie par le satellite ?

– On donnera ces résultats sans les démontrer. –

III - Satellite géostationnaire

La Terre tourne sur elle-même, autour de sa ligne des pôles, à la vitesse angulaire Ω . On ignore son mouvement de révolution autour du Soleil.

Le satellite évolue maintenant de façon géostationnaire¹, c'est-à-dire qu'il tourne de façon synchrone avec la Terre sur une orbite circulaire de rayon a_1 , située dans le plan équatorial.

A3.1. Exprimer l'équilibre dynamique du satellite sur son orbite géostationnaire.

En déduire l'expression du rayon a_1 de son orbite, en fonction de G , M et Ω .

A3.2. Exprimer l'énergie potentielle de gravitation $U(r)$ du satellite situé à la distance r du centre de la Terre, en fonction de G , M , m et r .

On considère ici que $U(r)$ est nulle pour r infini.

A3.3. Exprimer l'énergie mécanique totale E_T du satellite sur son orbite géostationnaire, en fonction de G , M , m et a_1 .

A3.4. Le satellite a été lancé à partir d'une base terrestre située sur l'équateur (Kourou).

Déterminer l'énergie minimale, W_L , qu'il a fallu dépenser pour le placer sur orbite géostationnaire.

A3.5. Exprimer la différence W_L entre l'énergie minimale de lancement sur orbite géostationnaire à partir d'une base équatoriale et à partir d'une base située à la latitude $\lambda > 0$.

Est-il, sur le plan énergétique, préférable d'effectuer les lancements depuis la base de Kourou ($\lambda = 0$) ou du Cap Canaveral ($\lambda = 28^\circ \text{N}$) ?

IV - Phénomènes électriques et magnétiques affectant les satellites

¹ « géostationnaire » signifie immobile pour un observateur terrestre.

Nous allons dans cette dernière partie entrevoir les conséquences sur le satellite de l'existence du champ magnétique terrestre.

Le satellite est maintenant « défilant » sur une orbite circulaire équatoriale de rayon $a = a_1$. Pour un observateur terrestre, il tourne à la vitesse angulaire apparente ω_a , dans le sens opposé à la rotation terrestre. Nous raisonnerons comme si la Terre était immobile, et le satellite animé de la vitesse angulaire ω_a .

Nous admettrons, que dans la zone d'évolution du satellite, les lignes du champ magnétique terrestre sont assimilables à des grands cercles de centre O , passant par l'axe des pôles (cercles méridiens). Ces lignes de champ sont orientées du pôle Nord vers le pôle Sud. Le module, B , du champ est fonction de l'altitude, mais il nous le supposons uniforme à l'échelle du satellite. Les lignes de champ sont solidaires de la sphère terrestre.

A4.1. Le défilement du satellite s'accompagne de l'apparition d'un champ électrique E en son sein.
Expliquer l'origine physique de ce champ.
Préciser dans quelle direction il apparaît (haut-bas, nord-sud ou est-ouest ?)

A4.2. Donner l'expression du module de E .

A4.3. En supposant le satellite de forme sphérique, de diamètre D , quelle différence de potentiel maximale U peut apparaître entre deux points diamétralement opposés.
Cette différence de potentiel est-elle utilisable pour fournir une alimentation électrique de faible puissance ?

Par suite des frottements dans l'atmosphère, le satellite acquiert, au cours de son ascension, une charge électrique q .

A4.4. Montrer que le satellite chargé est soumis à une force de nature magnétique, F_m , dont on précisera l'origine et dont on donnera l'expression.

A4.5. En supposant q négatif, le satellite défilant d'est en ouest, dire si cette force a tendance à accroître ou à réduire le rayon a de la trajectoire.
Représenter la situation sur une vue de dessus.

DEUXIEME PROBLEME
ETUDE D'UN TORE FERROMAGNETIQUE

Ce problème comporte quatre parties indépendantes qui peuvent être traitées séparément.

Question préliminaire : Excitation magnétique créée par un conducteur filiforme rectiligne infini

B01. Le conducteur est vertical, et parcouru par un courant I dirigé de bas en haut.

Représenter l'allure des lignes du champ d'excitation magnétique \mathbf{H} , en précisant leur orientation.

- En appliquant le théorème d'Ampère, établir l'expression de l'excitation magnétique $H(r)$ créée par ce conducteur à la distance r .

I - Induction magnétique dans un tore

On considère un tore circulaire de section rectangulaire, de rayon intérieur a_1 , de rayon extérieur a_2 et de hauteur h . Ce tore est constitué d'un matériau ferromagnétique de perméabilité, $\mu = \mu_0 \mu_r$, élevée ($\mu_r \gg 1$), qui sera dans un premier temps supposé linéaire.

Sur ce tore sont disposés deux enroulements uniformément répartis, le premier comportant n_1 spires, le second n_2 spires. n_1 et n_2 sont suffisamment élevés pour que l'on puisse considérer que le problème présente une invariance par rotation autour de l'axe du tore.

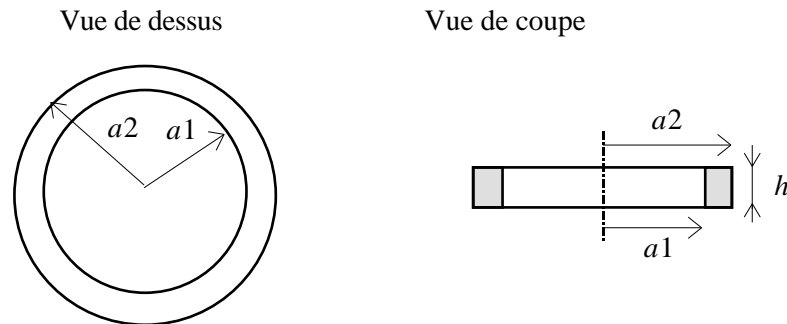


Figure 1

B1.1. Le premier enroulement (n_1 spires) est parcouru par un courant I , continu.

En adoptant un sens de circulation du courant que l'on précisera, représenter l'allure des lignes du champ d'excitation magnétique \mathbf{H} dans le tore. – On prendra soin de bien faire figurer son orientation –.

B1.2. Etablir l'expression de l'excitation magnétique $H(r)$ dans le tore, à la distance r de l'axe.

B1.3. Déterminer l'expression du flux ϕ d'induction magnétique à travers une section radiale, S , du tore.

B1.4. On considère une section non radiale, S' , obtenue par rotation du plan radial d'un angle α , égal à $\pi/4$, autour d'une droite parallèle à l'axe du tore et passant par le rayon a_1 .

Relier le flux d'induction magnétique ϕ' à travers S' , au flux ϕ précédent.

Les n_1 spires sont maintenant parcourues par un courant lentement variable de la forme $i(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t$.

On se place dans l'hypothèse des régimes quasi-stationnaires.

B1.5. En considérant les deux enroulements orientés dans le même sens, donner l'expression algébrique de la force électromotrice induite $e(t)$ apparaissant aux bornes du second enroulement.

II - Tore avec entrefer

On pratique dans le tore précédent, selon une section radiale, une ouverture (*entrefer*) de longueur ϵ très petite devant la longueur de la circonférence minimale du tore : $2\pi a_1$.

On considérera que la longueur l de toute fibre circulaire prise dans le tore n'est pas affectée par la présence de l'entrefer : $l = \epsilon + l$.

L'entrefer est rempli d'air, assimilable sur le plan magnétique au vide ($\mu_a = \mu_0$). On négligera les effets de bord sur la périphérie de l'entrefer.

Le courant I parcourant les n_1 spires du premier enroulement est à nouveau constant.

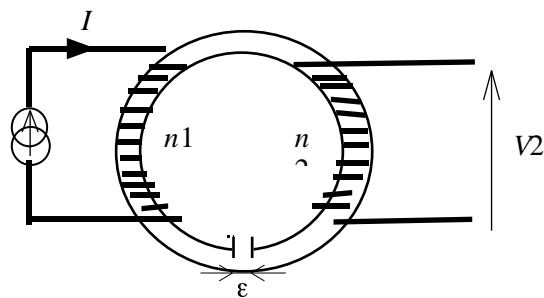


Figure 2

B2.1. Représenter l'allure des lignes de champ dans l'entrefer et les portions environnantes du tore.

On note respectivement H_t , l'excitation magnétique dans le tore, H_e , celle dans l'entrefer, B_t , l'induction magnétique dans le tore et B_e , celle dans l'entrefer.

B2.2. Indiquer en le justifiant quelle grandeur, de H ou B , se conserve lorsque l'on passe du matériau magnétique à l'entrefer.

B2.3. En appliquant le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r , compris entre a_1 et a_2 , situé dans le tore, établir une équation reliant les excitations H_t et H_e au courant I .

B2.4. En exploitant les relations entre excitations et inductions, en déduire l'expression de l'induction magnétique B_e dans l'entrefer.

III - Sonde à effet Hall

On réalise une expérience dans laquelle un matériau (non magnétique) est placé dans l'entrefer du tore précédent. On cherche à mesurer l'induction magnétique à laquelle est soumise cet échantillon. Pour ce faire, on utilise une sonde à effet Hall, dont on se propose dans cette partie d'étudier le fonctionnement.

La sonde a la forme d'un parallélépipède, de largeur L et de hauteur d , constitué d'un matériau contenant des électrons libres (métal ou semiconducteur). On note n la concentration en électrons libres de ce matériau (*i.e.* le nombre moyen d'électrons libres par unité de volume). L'ensemble du parallélépipède reste en toute circonstance neutre électriquement.

La sonde est rapporté au repère $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\{e_x, e_y, e_z\}$.

Un courant électrique continu d'intensité I , connue, parcourt la sonde dans le sens positif de l'axe Ox . La densité de courant correspondante, \mathbf{j} , est supposée uniforme : $\mathbf{j} = j_x e_x$, avec $j_x > 0$.

La sonde est soumise à une induction uniforme \mathbf{B} dirigée selon Oz : $\mathbf{B} = B_z e_z$ avec $B_z > 0$. (figure 3).

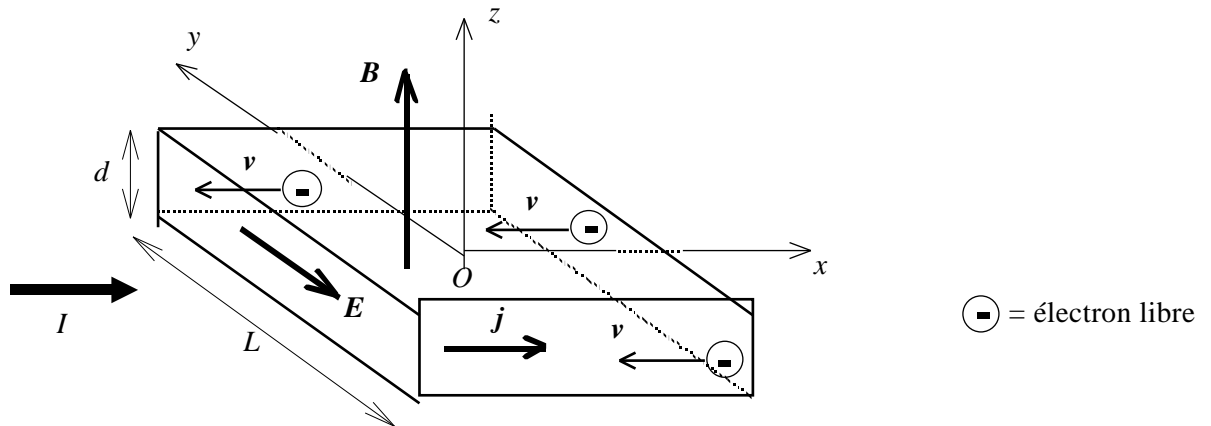


Figure 3

B3.1. On désigne par $\mathbf{v} = v_x e_x$, avec $v_x < 0$, le vecteur vitesse des électrons libres.

Justifier le fait que les vecteurs \mathbf{j} et \mathbf{v} sont opposés.

Exprimer la densité de courant \mathbf{j} en fonction de \mathbf{v} , n et e , où e représente au signe près la charge de l'électron ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C).

B3.2. Donner l'expression et représenter graphiquement la force magnétique \mathbf{f}_m s'exerçant sur un électron libre.

Sous l'action de la force magnétique précédente, les électrons vont se concentrer sur une face du parallélépipède, en faisant apparaître sur la face opposée des charges positives correspondant aux ions du matériau prisonniers du réseau cristallin. Cette séparation des charges s'accompagne de la création d'un champ électrique $\mathbf{E} = E_y e_y$. Nous supposons que ce champ électrique est uniforme dans le volume de la sonde.

B3.3. Ecrire l'expression de la force totale \mathbf{f} s'exerçant sur un électron libre.

B3.4. A l'équilibre, la force totale est nulle. En déduire l'expression de \mathbf{E} , en fonction de n , e , \mathbf{j} et \mathbf{B} .

B3.5. Expliquer pourquoi il apparaît une différence de potentiel, appelée *tension de Hall* et notée V_H , entre les deux faces du parallélépipède parallèles au plan xOz . Indiquer sa polarité.

Etablir l'expression de V_H en fonction de I , d et K , où l'on a posé : $K = 1 / n e$.

B3.6. Dans la pratique, on préfère utiliser un semiconducteur plutôt qu'un métal car pour une même valeur du champ magnétique, on obtient une tension plus élevée. D'après la relation établie dans la question précédente, interpréter ce résultat.

B3.7. Calculer de façon approchée la valeur numérique de V_H dans les deux cas suivants:

- barreau de cuivre: $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$, $I = 100 \text{ mA}$, $B = 0,16 \text{ T}$ et $d = 0,1 \text{ mm}$

- barreau de silicium : $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$, $I = 100 \text{ mA}$, $B = 0,16 \text{ T}$ et $d = 0,1 \text{ mm}$.
 Que pensez-vous des valeurs calculées ?

IV - Pertes par hystérésis

Nous considérons le tore précédent, sans entrefer, où seul figure l'enroulement primaire de n_1 spires (figure 5). Le fil constituant celui-ci présente une résistance électrique totale, notée R .

Nous supposons pour simplifier que les norme H et B de l'excitation et de l'induction magnétiques sont uniformes dans toute section droite, S , du tore. Les valeurs retenues sont celles observées sur la fibre moyenne du tore de rayon $a = (a_1 + a_2) / 2$.

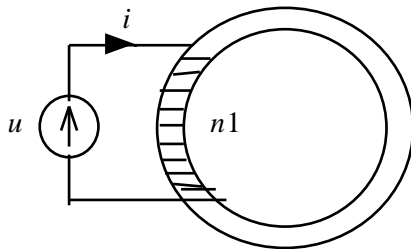


Figure 4

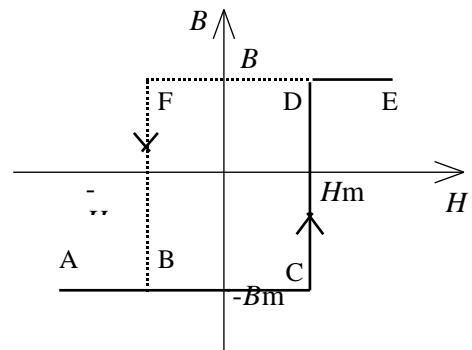


Figure 5

Le matériau magnétique utilisé est supposé dans un premier temps linéaire et exempt d'hystérésis, de sorte que l'on a la relation : $B = \mu H$.

B4.1. Le dispositif est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale u dont la résistance interne est négligeable devant R et qui débite un courant i . L'ensemble vérifie la relation suivante :

$$u = Ri + n_1 S \frac{dB}{dt} \quad (1)$$

Justifier cette relation. Par quel élément électrique peut être représenté le terme " $n_1 S \frac{dB}{dt}$ " ?

On considère maintenant et dans toute la suite que le matériau magnétique constituant le tore possède une caractéristique $B = f(H)$ présentant un fort phénomène d'hystérésis (figure 5). Nous nous proposons ici de calculer les pertes dues à cette hystérésis.

B4.2. En multipliant chaque terme de la relation (1) par $i dt$, et en modifiant légèrement cette relation, on obtient :

$$u i dt - R i^2 dt = n_1 S i dB \quad (2)$$

Quelle grandeur énergétique représente chacun des trois termes de cette équation ?

B4.3. En appliquant le théorème d'Ampère, établir la relation liant le courant i à l'excitation magnétique H .

B4.4. On note δW la quantité élémentaire : $S i dB$.

En utilisant le résultat du **B4.3.**, exprimer δW en ne faisant intervenir que des grandeurs magnétiques, – le courant i étant exclu –.

En régime sinusoïdal permanent, le point de fonctionnement décrit le cycle d'hystérésis idéalisé de la figure 5. Une période correspond au cycle A-B-C-D-E-F-B.

B4.5. Exprimer, sous forme d'une intégrale, la valeur algébrique du travail W_1 reçu par le tore magnétique (hors enroulement) durant la première alternance de i ($di/dt > 0$); alternance au cours de laquelle, le point représentatif de l'état du système se déplace sur la courbe d'hystérésis selon le chemin A-B-C-D-E.

Faire apparaître graphiquement ce résultat sur la figure 5.

B4.6. Exprimer, sous forme d'une intégrale, la valeur algébrique du travail W_2 reçu par le tore magnétique durant la seconde alternance de i ($di/dt < 0$); alternance au cours de laquelle le point représentatif du système se déplace sur la courbe d'hystérésis selon le chemin E-D-F-B-A.

Faire apparaître graphiquement ce résultat sur la figure 5.

B4.7. Exprimer le travail total, W , reçu par le tore magnétique (hors enroulement) au cours d'une période.

Montrer que ce travail est :

- proportionnel à l'aire A du cycle d'hystérésis (rectangle BCDF),
- proportionnel, en première approximation, au volume du tore.

B4.8. La fréquence de travail est f . Exprimer la puissance moyenne PH des pertes par hystérésis dans le tore.

oooooo