ÉQUATIONS DE MAXWELL

1. FORME LOCALE, DANS LE CAS GÉNÉRAL

James Clerck Maxwell (1831-1879) écrivit ses célèbres équations en 1864. Elles ont été réécrites plus tard sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{D} = \rho & (1) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 & (3) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

avec :
- $\vec{E}$ champ électrique
- $\vec{B}$ champ magnétique
- $\vec{D}$ excitation électrique
- $\vec{H}$ excitation magnétique
- ρ densité de charge
- $\vec{j}$ densité de courant

On a les relations : $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ avec ε : permittivité diélectrique ($\varepsilon = \varepsilon_r.\varepsilon_0$)

$\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu}$ μ : perméabilité magnétique ($\mu = \mu_r.\mu_0$)

⇨ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés par les équations (2) et (4).

2. DANS LE VIDE

2.1. Forme locale :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (1) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 & (3) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

On a remplacé $\vec{D}$ par $\varepsilon_0\vec{E}$ et $\vec{H}$ par $\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$

2.2. Forme intégrale et signification physique

a) <u>calculs</u>

On intègre les équations (1) et (3) sur un volume $\mathscr{V}$ limité par une surface fermée S :

(1) : $\iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\vec{E}.d^3\mathscr{V} = \iiint_{\mathscr{V}} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}.d^3\mathscr{V}$, soit, en utilisant le théorème d'Ostrogradski : $\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{d^2S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{V}} \rho.d^3\mathscr{V}$

(3) : $\iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\vec{B}.d^3\mathscr{V} = 0$, soit, en utilisant le théorème d'Ostrogradski : $\oiint_S \vec{B}.\overrightarrow{d^2S} = 0$

On intègre les équations (2) et (4) sur une surface S bordée par un contour fermé C :

(2) : $\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}).\overrightarrow{d^2S} = \iint_S -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{d^2S}$, soit, en utilisant le théorème de Stokes : $\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}.\overrightarrow{d^2S}$

(4) : $\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}).\overrightarrow{d^2S} = \iint_S \left(\mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).\overrightarrow{d^2S}$, soit, en utilisant le théorème de Stokes : $\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_0\iint_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).\overrightarrow{d^2S}$

On peut alors introduire les courants dits de déplacement, dont la densité s'exprime par $\overrightarrow{j_D} = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, ce qui conduit à

$$\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_0\iint_S \left(\vec{j} + \overrightarrow{j_D}\right).\overrightarrow{d^2S}$$

b) résultats

Équations de Maxwell dans le vide (forme intégrale) :	Signification physique :
$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{d^2S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{V}} \rho.d^3\mathscr{V}$ (1)	théorème de Gauss dans le vide : $\Phi\left(\vec{E}, S_{\text{ fermée}}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{int}}(S)$
$\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}.\overrightarrow{d^2S}$ (2)	$\mathscr{C}\left(\vec{E}, C_{\text{ fermé}}\right) = -\dfrac{\partial \Phi\left(\vec{B}, S(C)\right)}{\partial t}$; lié à la loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\Phi\left(\vec{B}, S(C)\right)}{dt}$
$\oiint_S \vec{B}.\overrightarrow{d^2S} = 0$ (3)	$\vec{B}$ à flux conservatif : $\Phi\left(\vec{B}, S_{\text{ fermée}}\right) = 0$
$\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \vec{j_D}\right).\overrightarrow{d^2S}$ (4)	théorème d'Ampère généralisé, dans le vide : $\mathscr{C}\left(\vec{B}, C_{\text{ fermé}}\right) = \mu_0 \left(I + I_D\right)_{\text{int}}(C)$

c) remarques

(1) : Le théorème de Gauss s'écrit aussi sous la forme équivalente : $\Phi\left(\vec{D}, S_{\text{ fermée}}\right) = Q_{\text{int}}(S)$

(4) : Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit aussi sous la forme équivalente : $\mathscr{C}\left(\vec{H}, C_{\text{ fermé}}\right) = \left(I + I_D\right)_{\text{int}}(C)$

Ces deux expressions sont également valables dans un matériau.

Dans le théorème d'Ampère, la circulation de $\vec{B}$ (ou de $\vec{H}$), s'écrit généralement $\oint_{M \in C} \vec{B}.\overrightarrow{dOM}$ plutôt que $\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{d\ell}$, pour prendre en compte que C n'est qu'un contour mathématique et non un circuit électrique physique, comme c'est le cas dans de la loi de Faraday.

(3) : cette propriété conduit à la définition du potentiel vecteur $\vec{A}$ à partir de $\vec{B}$: $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{A}\right)$.

(2) : donne dans l'A.R.Q.S. la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

3. DANS LE VIDE, EN L'ABSENCE DE CHARGES ET DE COURANTS

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{E} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 & (3) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{B}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

$\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$

c désignant la vitesse de la lumière dans le vide, $\varepsilon_0.\mu_0.c^2 = 1$

4. RÉGIMES STATIONNAIRES

En régime stationnaire, $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont découplés.

4.1. Équations locales de l'électrostatique dans le vide

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right) = \vec{0} \end{cases}$$

Traduit le lien du champ avec ses sources et conduit au théorème de Gauss (cf. 2.2.b).

Exprime une propriété du champ : un champ électrostatique ne peut pas faire circuler de courant $\Rightarrow$ définition du potentiel électrostatique à partir de $\vec{E}$.

La combinaison de ces deux équations conduit dans le vide à l'équation de Poisson : $\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

($\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}$: laplacien scalaire), cette équation conduisant elle-même à la définition générale de V.

4.2. Équations locales de la magnétostatique dans le vide

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{B} = 0 \quad (3) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{B}\right) = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Exprime une propriété du champ : un champ magnétique est à flux conservatif (cf. 2.2.b).

Traduit le lien du champ avec ses sources et conduit au théorème d'Ampère sous sa forme classique.