Solution E1

L'équa. diff. est définie par :

```
function # = yprime(t,y)
   # = -y
endfunction
```

c'est-à-dire $y' = -y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + y(t) = 0}$

La solution est de la forme $y(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec ici $\tau = 1$. Donc $y(t) = A\mathrm{e}^{-t}$

La constante A est telle que $y(0) = 1 = A\mathrm{e}^{-0} = A \Rightarrow \boxed{y(t) = \mathrm{e}^{-t}}$

Le graphe fourni par `ode` est rigoureusement identiques à celui de la fonction $y(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

Solutions E2 (chute d'une bille dans le glycérol)

1. On étudie la bille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{A} = -mg\vec{u_z} - 6\pi\eta Rv\vec{u_z} + m_L g\vec{u_z} = m\vec{a} = m\dot{v}\vec{u_z} \quad \Rightarrow \quad -mg - 6\pi\eta Rv + m_L g = m\dot{v}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v} = -\frac{6\pi\eta R}{m}v - g + \frac{m_L}{m}g = -\frac{6\pi\eta R}{m}v + \left(\frac{m_L}{m} - 1\right)g$$

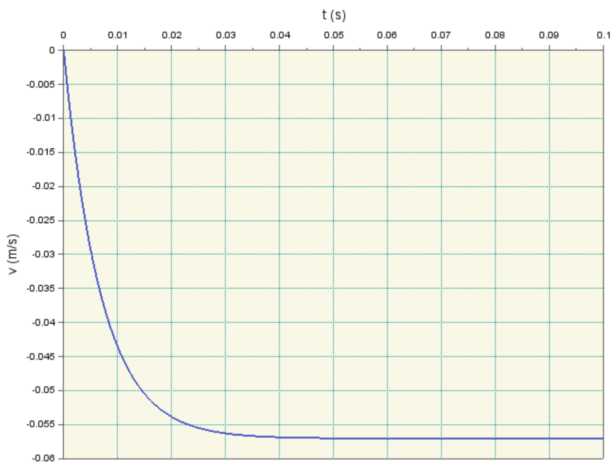
$$m = \rho_1 \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{et} \quad m_L = \rho_2 \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{9\eta}{2\rho_1 R^2}v + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)g}$$

2.

```
// dv/dt=a*v+b  avec  a=-9*eta/(2*rho1*R^2)  et  b=(rho2/rho1-1)*g
// paramètres :
rho1 = 7800;
rho2 = 1260;
g = 9.81;
eta = 1;
R = 0.002;
a = -9*eta/(2*rho1*R^2);
b = (rho2/rho1-1)*g;
// valeurs initiales
v0 = 0;  //dans un 1er temps
t0 = 0;
// intervalle de temps (1000 valeurs entre 0 et 0,1s)
t= linspace(0,0.1,1000);
// equa diff :
function #=vprime(t,v)
   #=a*v+b
endfunction
// vitesse nommée v1
v1=ode(v0,t0,t,vprime)
```

3. Tracer `v1` en fonction de `t`. On ajoute un "`;`" à la dernière ligne et on ajoute :

```
v1=ode(v0,t0,t,vprime);
plot2d(t,v1)
// plus éventuellement (corriger le chemin)
:
//exec(' P:\chemin…\options_graphes.sci', -
1)
```



chute d'une bille de 2 mm dans le glycérol

Solution E3

$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$ avec $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(y')^2$ et $\mathscr{E}_p = \mathscr{E}_p(\vec{P}) + \mathscr{E}_p(\vec{T})$. $\mathscr{E}_p(\vec{P}) = cste$ au cours du mouvement /Oy.

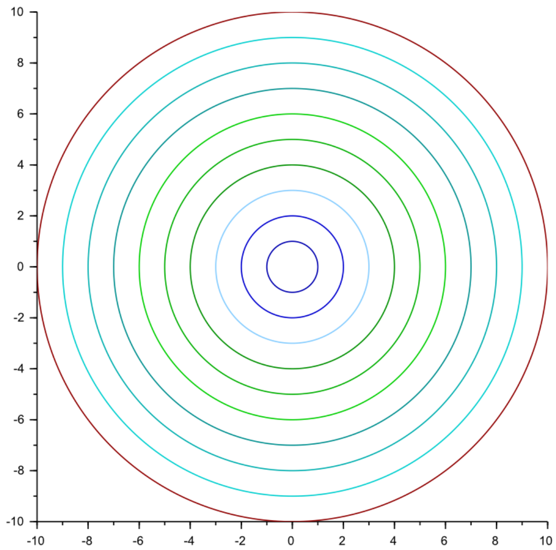
$$\mathscr{E}_p(\vec{T}) = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 + C = \frac{1}{2}ky^2 + C \text{ ; en } y = 0, \mathscr{E}_p = 0 \Rightarrow C = 0$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m(y')^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2}$

Solution E4

Script complet possible :

```
w = 2;
function #=Yprime(t, Y)
 #(1)=Y(2)
 #(2)=-w^2*Y(1)
endfunction
Y0 = [1;0]
t0 = 0
t = linspace(0,10,1000)
Y = ode(Y0,t0,t,Yprime)
scf(2);
t0=0
t=linspace(0,10,1000)
for y0=0:10
    Y0=[y0;0]
    Y=ode(Y0,t0,t,Yprime)
    plot2d(Y(1,:),Y(2,:)/w,style=y0+9)
end
A=gca();    // accès aux propriétés des axes
A.isoview="on";  // base orthonormée
```



Solution E5

La masse ponctuelle située à l'extrémité du fil sans masse de longueur ℓ (pendule simple) est soumise à son poids et à l'action $\vec{T}$ du fil. $\vec{T}$ étant perpendiculaire au mouvement, son travail est nul : on prendra $\mathscr{E}_p(\vec{T}) = 0$.

On a donc $\mathscr{E}_p = \mathscr{E}_p(\vec{P}) = -mgx + cste$, Ox désignant l'axe vertical descendant $\Rightarrow$ $\mathscr{E}_p = -mg\ell\cos\theta + cste$

D'autre part $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$, donc $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta + cste$

$\frac{d\mathscr{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow \ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$, soit $\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\sin\theta = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

Solution E6

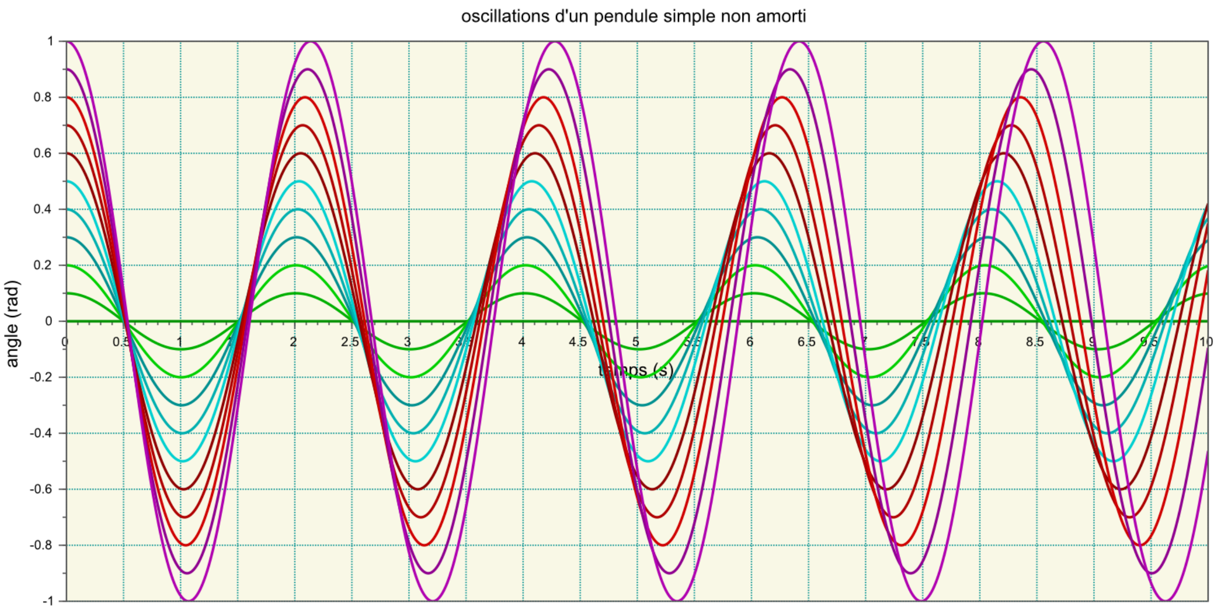
L'équa. diff. sera tout d'abord mise sous la forme $\ddot{\theta} = -\omega_0^{\,2} \sin\theta$

On introduit alors $\mathbf{Q}(t)\left|\begin{array}{l} Q_1 = \theta(t) \\ Q_2 = \dot{\theta}(t) \end{array}\right.$ pour avoir l'équa. diff. sous la forme : $\mathbf{Q'}(t) = f\left(t, \mathbf{Q}(t)\right)$ avec $f\left(t, \mathbf{Q}(t)\right) = \left|\begin{array}{l} Q_2 \\ -\omega_0^{\,2}\, Q_1 \end{array}\right.$

Conditions initiales $\mathbf{Q}(0) = \left|\begin{array}{l} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{array}\right.$. Dans Scilab, on remplacera θ par `q` et θ_0 par `q0`. Script possible :

```
g = 9.81          // m/s²
L = 1             // m
w = sqrt(g/L)   // oméga-zéro
function #=Qprime(t, Q)
    #(1)  = Q(2)              // θpoint
    #(2)  = -w^2*sin(Q(1))   // θ2points
endfunction
t = linspace(0,10,1000)
t0 = 0              // temps initial
for i = 0:10
    q0 = i/10    // angle initial variable (11 valeurs entre 0 et 1 rad)
    Q0 = [q0;0]    // CI
    Q = ode(Q0,t0,t,Qprime)
    plot2d(t,Q(1,:),style=i+13)
end
```

Tracé traité avec "*options graphes.sci*" :



On remarque nettement que la période des oscillations augmente avec l'amplitude. L'isochronisme des oscillations est mis en défaut.