M 50. Régime apériodique : influence des conditions initiales

On rappelle qu'un oscillateur unidimensionnel fortement amorti (régime apériodique) est régi par une équation horaire du type : $x(t) = x_{eq} + A_1 e^{-\delta_1 t} + A_2 e^{-\delta_2 t}$. On suppose δ_1 et δ_2 connus, avec $\delta_2 > \delta_1$. L'origine des x est telle que $x_{eq} = 0$.

1) On donne la position initiale $x(t=0) = x_0 > 0$ et la vitesse initiale $\dot{x}(t=0) = 0$

Exprimer A_1 et A_2 en fonction de δ_1, δ_2, et x_0.

En déduire l'expression de $x(t)$. Donner l'allure du graphe de $x(t)$.

2) Mêmes questions avec $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 < 0$.

M 51. Amortissement optimal.

Considérons un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = 10\ \text{rad·s}^{-1}$. Le mouvement a lieu suivant Ox, l'origine O étant choisie sur la position d'équilibre du point. À $t = 0$, le point est en $x = x_0$, et il est lâché sans vitesse initiale. Nous voulons comparer les durées du retour à l'équilibre dans le cas des régimes apériodiques et critique.

1) On donne le facteur d'amortissement relatif $\xi = 2$. Le régime est donc apériodique.
   Calculer la date t_0 définie par $x(t_0) = \dfrac{x_0}{100}$ (méthode numérique).
2) Même question dans le cas du régime critique. Conclusion.

Rép : 1,75 s ; 0,66 s

M 52. Signification énergétique du facteur de qualité

Considérons un oscillateur harmonique amorti, de variable x : $x = x_{eq} + A e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega'_0 t + \varphi)$

On rappelle que le facteur de qualité s'exprime par : $Q = \dfrac{1}{2\xi}$

1) Exprimer l'énergie mécanique à une date t.

2) Que peut-on dire du facteur d'amortissement et du facteur de qualité lorsque les frottements sont extrêmement faibles ? En déduire qu'alors $T'_0 \approx T_0$

3) Montrer que, dans ces conditions, la variation relative d'énergie mécanique au cours d'une pseudopériode vaut :

$$\frac{\Delta\mathscr{E}_m(t \to t + T'_0)}{\mathscr{E}_m(t)} = -\frac{2\pi}{Q}$$

Développement limité de la fonction exponentielle : on indique que lorsque $x \ll 1$: $e^x \approx 1 + x$

4) En déduire la signification de "facteur de *qualité*"

M 53. Mesure de la viscosité d'un fluide.

Afin de déterminer expérimentalement la viscosité η d'un fluide, on y plonge une petite sphère suspendue à un ressort.

La masse m et le rayon R de la sphère ont été mesurés, et on notera k (raideur) et ℓ_V (longueur à vide) les caractéristiques (inconnues) du ressort.

1) La sphère étant ici petite, on l'assimilera à un point et on supposera la poussée d'Archimède négligeable. La force de frottement exercée par le fluide sera prise sous la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la sphère dans le fluide, et la mettre sous la forme : $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$, x désignant la position de la sphère sur un axe vertical descendant.

2) On mesure la période T_0 des oscillations libres dans l'air puis la pseudopériode T'_0 des oscillations amorties dans le fluide. Sachant que pour une sphère de rayon R, la constante λ caractérisant la force de frottement fluide est reliée à la viscosité η par $\lambda = 6\pi\eta R$, exprimer η en fonction de T_0, T'_0 et des caractéristiques de la sphère.

Rép : $\eta = \dfrac{2m}{3R}\sqrt{\left(\dfrac{1}{T_0^2} - \dfrac{1}{T'^2_0}\right)}$

M 54. Mesure de masse en apesanteur

En apesanteur, par exemple dans la station spatiale internationale, les dispositifs usuels de mesure de masse ne sont plus fonctionnels à cause de l'absence de gravité. On peut toutefois mesurer la masse en utilisant une chaise fixée sur un ressort lui-même attaché à un point de la station. L'astronaute de masse m s'accroche à la chaise, on l'écarte de $x_0 = 30$ cm, et on le lâche sans vitesse initiale. On mesure alors la période d'oscillation T du système. Le ressort a une longueur à vide $l_0 = 1{,}0$ m et une raideur $k = 6{,}0.10^2$ N·m^{-1}.

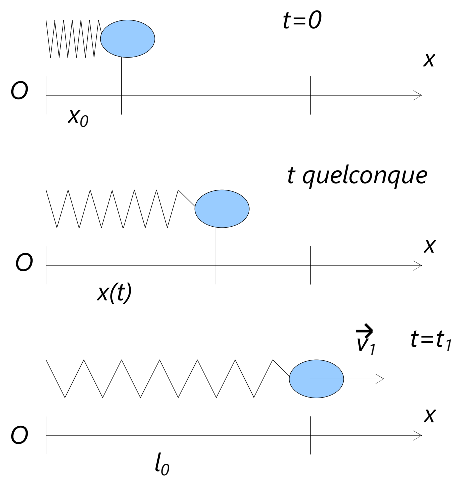
1) Faire un schéma, l'origine O de l'axe Ox sera prise à l'équilibre (lorsque $l = l_0$).

2) Établir l'équation différentielle sur $x(t)$ la position de l'astronaute au cours du temps. La résoudre pour trouver $x(t)$.

3) On mesure $T = 2{,}33$ s pour un astronaute dont la masse avant le départ en orbite était $m' = 60$ kg. Trouver la masse m et commenter.

4) Sur Terre, avec le dispositif "à vide", c'est à dire horizontal et sans personne accroché dessus, on mesure $T' = 1{,}28$ s. En déduire la bonne valeur de la masse m.

M55. Lanceur de bille de flipper



Un lanceur de bille de flipper est constitué d'un ressort de raideur $k = 0{,}50$ kN·m^{-1} et longueur à vide $l_0 = 10$ cm sur lequel vient s'appuyer la bille de masse $m = 50$ g et qu'on peut comprimer d'une longueur au choix et qu'on relâche pour envoyer la bille. Afin de simplifier la résolution, on va faire quelques hypothèses : lorsque le joueur lâche la tirette, la bille n'a pas de vitesse initiale, la bille quitte le ressort exactement lorsque celui-ci retrouve sa longueur à vide et dans un premier temps le dispositif est considéré horizontal.

Le but du joueur est de lancer la bille exactement à la bonne vitesse $v_{bon} = 4{,}0$ $m{\cdot}s^{-1}$pour qu'elle tombe dans la bonne cible.

1) Estimer la valeur numérique de la force que doit exercer le joueur pour comprimer le ressort à son maximum ($x(0) = 0$).

Par la suite on notera $x(0) = x_0$ la position choisie par le joueur pour lâcher la bille.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, on l'écrira sous la forme $\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = \omega_0{}^2 x_{eq}$ et on exprimera ω_0 et x_{eq} en fonction de k, l_0 et m.

3) Résoudre cette équation différentielle et tracer l'allure de $x(t)$. On fera apparaître l'amplitude. Indiquer sur le graphique le temps t_1 où la bille quitte le ressort.

4) Exprimer par le calcul ce temps t_1 en fonction de ω_0.

5) Trouver l'expression de la vitesse de la bille au cours du temps $v(t)$.

6) En déduire l'expression de la vitesse v_1 de la bille lorsqu'elle quitte le ressort en fonction de ω_0, x_{eq} et x_0.

7) Trouver alors à quelle position x_0 on doit lâcher pour atteindre la bonne cible. Faire l'application numérique.

8) Exprimer puis calculer l'énergie potentielle à $t = 0$ et à $t = t_1$, commenter.

Exprimer puis calculer l'énergie cinétique à $t = 0$ et à $t = t_1$, commenter.

Exprimer puis calculer l'énergie mécanique à $t = 0$ et à $t = t_1$, commenter.

9) [Bonus], si on considère que le lanceur est incliné d'un angle $\alpha = 5{,}0°$ par rapport à l'horizontale, de combien est modifiée la vitesse précédente ? On utilisera une considération énergétique, en utilisant l'énergie potentielle de pesanteur. On donne $g = 10$ m·s^{-2}.